Zur Berechnung gleichzeitiger Flüsse verschiedener Beschaffenheit

W. Gaul, Bonn

Zusammenfassung: Die Arbeit beschäftigt sich mit Problemstellungen, die bei der Behandlung gleichzeitiger Flüsse verschiedener Beschaffenheit unter Nebenbedingungen entstehen. Für den Spezialfall zweier gleichzeitiger Flüsse verschiedener Beschaffenheit wird ein neues Verfahren angegeben, das solche Flüsse durch eine zweimalige Anwendung des Ford/Fulkerson-Markierungsalgorithmus (zur Berechnung jeweils nur eines Flusses) in geeignet gewählten Netzwerken bestimmt. Das vorgeschlagene Verfahren wird mit bekannten Algorithmen verglichen und an einem Beispiel erläutert.

Einleitung

Die Behandlung von Problemstellungen, die sich mit gleichzeitigen Flüssen verschiedener Beschaffenheit in Netzwerken befassen, hat an Bedeutung gewonnen. Schon früh haben z.B. Ford/Fulkerson [1],[2,p.16] diesbezügliche Überlegungen veröffentlicht, jedoch hat die in [1] vorgeschlagene und in einer Reihe von Arbeiten erweiterte Methode (siehe [4]) mitunter ungünstige Konvergenzeigenschaften. Für spezielle Netzwerktypen haben z.B. Hu [6], Rothschild/Whinston [8],[9] und kürzlich Sakarovitch [10] Aussagen über die Existenz zweier gleichzeitiger Flüsse verschiedener Beschaffenheit und über Möglichkeiten ihrer Berechnung angegeben. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß für diesen Fall durch Wahl geeignet strukturierter Netze eine einfache Berechnung zweier gleichzeitiger Flüsse über den Markierungsalgorithmus von Ford/Fulkerson [2] möglich ist.

Formulierung des Problems

Sei $P=\{1,..,n\}$ die Punktmenge und $K\subset P\times P\setminus\bigcup\{(i,i)\,|\,i\in P\}$ die Kantenmenge des endlichen, gerichteten, schlichten (ohne Schlingen und parallele Kanten) Graphen (P,K). Bezeichne (P,K,c) ein antisymmetrisches ($(i,j)\in K \Rightarrow (j,i)\notin K$) Kapazitätsnetz (Netzwerk = zusammenhängender, endlicher, gerichteter, schlichter Graph), in dem jeder Kante $(i,j)\in K$ vermittels $c\in R_+^{*K}$ ein Kapazitätsintervall $[-c_{ij},c_{ij}]$ zugeordnet ist. In (P,K,c) nennt man $(x^1,...,x^k)$ mit $x^d\in R^{*K}$ und

$$I\,x^d = v^d \qquad d = 1,..,k \tag{1}$$

$$\sum_{d=1}^{k}|x^d| \le c \tag{2}$$

$$[v^d]_j = \begin{cases} v(x^d) & j = n_d \\ 0 & j \neq n_d, \hat{n}_d \\ -v(x^d) & j = \hat{n}_d \end{cases} \qquad \begin{matrix} n_d, \hat{n}_d \varepsilon P \\ n_d \neq \hat{n}_d \quad (d=1,..,k) \end{matrix} \tag{3}$$

k gleichzeitige Flüsse verschiedener Beschaffenheit. I ist die (Punkt-Kante-) Inzidenzmatrix von (P,K,c). $n_d, \hat{n}_d$ heißt Quelle, Senke, $v(x^d)$ Wert des d-ten Flusses. $v(x^1,..,x^k) := \sum_{d=1}^{k} v(x^d)$ ist der Wert von $(x^1,..,x^k)$. Für $b=(b^1,...,b^k)' \varepsilon R_+^k$ (oder $\nabla \varepsilon R_+$) heißt $(x^1,..,x^k)$ b-(oder ∇-) zulässig, wenn $v(x^d) \geq b^d$ für d=1,..,k (oder $v(x^1,..,x^k) \geq \nabla$) gilt. b^d, ∇ beschreibt durch die Flüsse zu befriedigenden Mindestbedarf. Bezeichne $F(P,K,c)_z^{n_1,...,n_k;\hat{n}_1,...,\hat{n}_k}$ (für z=b oder ∇) die Menge der k gleichzeitigen z-zulässigen Flüsse verschiedener Beschaffenheit in (P,K,c). Trennende Kantenmengen, die minimal sind mit der Eigenschaft, daß ihre Herausnahme aus dem Netz n_d von $\hat{n}_d$, $n_d \neq \hat{n}_d$ (d=1,...,k) trennen würde, seien mit $((n_1,..,n_k),(\hat{n}_1,..,\hat{n}_k)) \subset K$ bezeichnet und mit $S(P,K,c)^{n_1,...,n_k,\hat{n}_1,...,\hat{n}_k}$ die Familie dieser Kantenteilmengen. Jeder trennenden Kantenmenge ist als Wert $c((n_1,..,n_k),(\hat{n}_1,..,\hat{n}_k)) = \sum_{(i,j)\varepsilon((n_1,..,n_k),(\hat{n}_1,..,\hat{n}_k))} c_{ij}$ zugeordnet; von besonderem Interesse sind solche mit minimalem Wert, bezeichnet mit $\langle (n_1,..,n_k),(\hat{n}_1,..,\hat{n}_k) \rangle$. Als Problemstellungen ergeben sich (a) Existenzaussagen für z-zulässige gleichzeitige Flüsse (b) Angabe optimaler Flüsse (bzgl. vorgegebener Kosten) unter geeigneten Nebenbedingungen. Natürlich muß

$$\max v(x^1,..,x^k) \leq c \langle (n_1,..,n_k),(\hat{n}_1,..,\hat{n}_k) \rangle \tag{4}$$

und/oder

$$\max v(x^d) \leq c \langle (n_d),(\hat{n}_d) \rangle \quad d=1,..,k \tag{5}$$

gelten. Für den Spezialfall k=1 sind Lösungen der Probleme bekannt. Man braucht nicht zwischen b- oder ∇-zulässigen Lösungen zu unterscheiden, das bekannte Ford/Fulkerson [2]-Theorem weist nach, daß in (4) (oder (5)) sogar Gleichheit (für jeden Netzwerktyp) gilt. Man kann deshalb trennende Kantenmengen zur Bestimmung eines maximalen Flusses benutzen. Im allgemeinen Fall kann in (4) echte Ungleichheit auftreten (Ford/Fulkerson [2]). Lösungsansätze für die Probleme (a),(b) sind über "große" lineare Programme möglich, die Dekompositionsüberlegungen und in Unterprogrammen Verfahren zur Berechnung kürzester Wege (auch unter Nebenbedingungen, siehe [4]) benutzen.

Im Fall k=2 und unter Benutzung von Netzen vom hier beschriebenen Typ (P,K,c) existieren Aussagen, die es gestatten, in den nächsten Abschnitten den Nachweis der Existenz und die Berechnung von zwei gleichzeitigen z-zulässigen Flüssen verschiedener Beschaffenheit mit rein netzwerktheoretischen Überlegungen zu bewerkstelligen.

Ein Algorithmus zur Bestimmung z-zulässiger Doppelflüsse

Im Fall k=2 hat Hu [6] als erster Kriterien für die Existenz und ein Verfahren zur Berechnung von z-zulässigen Doppelflüssen (=zwei gleichzeitige z-zulässige Flüsse verschiedener Beschaffenheit) entwickelt, für das eine Verbesserungsmöglichkeit angegeben werden kann (siehe [5]). Verallgemeinernde Aussagen stammen von Rothschild/Whinston [8], [9] und Sakarovitch [10], der auch ein Verfahren zur Berechnung maximaler Doppelflüsse beschreibt, das auf Ford/Fulkerson-Markierungen in Netzen mit im Vergleich zum gegebenen Netzwerk etwa doppelt so umfangreicher Struktur basiert. Die jetzt vorgeschlagene Methode benutzt ebenfalls den Markierungsalgorithmus zur Berechnung z-zulässiger Doppelflüsse, benötigt aber nur Netze nahezu dergleichen Struktur wie das Ausgangsnetz. Dazu überlege man, daß im gegebenen Netz (P,K,c) die Bedingung $|x^1|+|x^2|\leq c$ äquivalent ist zu $-c\leq x^1+x^2\leq c$, $-c\leq x^1-x^2\leq c$, woraus mit

$$x^1_{ij} = \frac{1}{2}(f^1_{ij}+f^2_{ij}),\quad x^2_{ij} = \frac{1}{2}(f^1_{ij}-f^2_{ij}) \quad \text{für } (i,j)\varepsilon K \tag{6}$$

$$f^1_{ij} := x^1_{ij}+x^2_{ij},\quad f^2_{ij} := x^1_{ij}-x^2_{ij} \quad \text{für } (i,j)\varepsilon K \tag{7}$$

folgt, daß die Systeme

$$\begin{array}{ll} I\,f^1 = v^1+v^2 & I\,f^2 = v^1-v^2 \\ -c\leq f^1\leq c & -c\leq f^2\leq c \end{array} \tag{8}$$

äquivalent zu (1),(2),(3) sind (für k=2). Diese Systeme beschreiben aber jeweils ein Flußproblem mit Quellen n_1,n_2 (oder $n_1,\hat{n}_2$) und Senken $\hat{n}_1,\hat{n}_2$ (oder $\hat{n}_1,n_2$). Durch Einführung von Netzen (P^t,K^t,c^t_M) bzw. (P^t,K^t,c^t_b), t=1,2, mit $P^t=P\cup\{q,s\}$, $K^t=K\cup\bigcup_{d=1}^{2}K^{td}$ mit $K^{11}=K^{21}=\{(q,n_1),(\hat{n}_1,s)\}$, $K^{12}=\{(q,n_2),(\hat{n}_2,s)\}$, $K^{22}=\{(q,\hat{n}_2),(n_2,s)\}$ und

$$c^t_{Mij} = \begin{cases} c_{ij} & (i,j)\varepsilon K \\ M & (i,j)\varepsilon \bigcup_{d=1}^{2}K^{td} \end{cases} \quad \text{oder} \quad c^t_{bij} = \begin{cases} c_{ij} & (i,j)\varepsilon K \\ b^1+b^2 & (i,j)\varepsilon \bigcap_d K^{td} \\ b^d & (i,j)\varepsilon K^{td}\setminus\bigcap_d K^{td} \end{cases}$$

(M hinreichend groß gewählt), kann die Bestimmung z-zulässiger Doppelflüsse auf die Berechnung von maximalen bzw. ∇-zulässigen oder b^1+b^2-zulässigen Einzelflüssen f^t in den Netzen (P^t,K^t,c^t_M) oder (P^t,K^t,c^t_b), t=1,2, zurückgeführt werden. Dabei ist darauf zu achten, daß ∇-zulässige Flüsse f^t aus (P^t,K^t,c^t_M) nur dann vermittels (6) in ∇-zulässige Doppelflüsse (x^1,x^2) mit Quelle/Senke $n_d,\hat{n}_d$ für x^d (d=1,2) überführt werden, wenn für die f^t

$$f^t_{ij} = \begin{cases} w^d & (i,j)\varepsilon K^{td}-\bigcap_d K^{td} \\ w^1+w^2 & (i,j)\varepsilon \bigcap_d K^{td} \end{cases} \tag{9}$$

mit $w^d\leq c\langle(n_d),(\hat{n}_d)\rangle$, d=1,2 und $\sum_d w^d = \nabla\leq c\langle(n_1,n_1),(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\rangle$ gilt. Für b^1+b^2-zulässige Flüsse gilt (9) automatisch aufgrund der Konstruktion der Netze $(P^t,$

$K^t, c_b^t)$, $t=1,2$ (siehe auch den folgenden Abschnitt).

<u>Algorithmus:</u> Bestimmung (b^1,b^2)-zulässiger Doppelflüsse

<u>Schritt 1:</u> Anwendung des Markierungsalgorithmus auf (P^1,K^1,c_b^1) ergibt f^1 als maximalen Fluß. $v(f^1) < b^1+b^2 \Rightarrow F(P,K,c)^{n_1,n_2;\hat{n}_1,\hat{n}_2}_{(b^1,b^2)} = \emptyset$.

<u>Schritt 2:</u> Anwendung des Markierungsalgorithmus auf (P^2,K^2,c_b^2) ergibt f^2 als maximalen Fluß. $v(f^2) < b^1+b^2 \Rightarrow F(P,K,c)^{n_1,n_2;\hat{n}_1,\hat{n}_2}_{(b^1,b^2)} = \emptyset$.

<u>Schritt 3:</u> Sind die Schritte 1,2 erfolgreich, erhält man über (6) einen (b^1,b^2)-zulässigen Doppelfluß (x^1,x^2).

Bestimmung maximaler bzw. ∇-zulässiger Doppelflüsse.

<u>Schritt 1':</u> Anwendung des Markierungsalgorithmus auf (P^1,K^1,c_M^1) ergibt f^1 als maximalen Fluß. $v(f^1) < \nabla \Rightarrow F(P,K,c)^{n_1,n_2;\hat{n}_1,\hat{n}_2}_{\nabla} = \emptyset$.

<u>Schritt 2':</u> Anwendung des Markierungsalgorithmus auf (P^2,K^2,c_M^2) ergibt f^2 als maximalen Fluß. $v(f^2) < \nabla \Rightarrow F(P,K,c)^{n_1,n_2;\hat{n}_1,\hat{n}_2}_{\nabla} = \emptyset$.

<u>Schritt 3':</u> $\tilde{\nabla} = \min\{v(f^1),v(f^2)\}$ ist der maximale Wert für Doppelflüsse in (P,K,c). Erfüllen f^1,f^2 die Bedingungen (9), erhält man über (6) einen (maximalen) Doppelfluß (x^1,x^2) (der notfalls auf den gewünschten Wert ∇ reduziert werden kann). Andernfalls hat man geeignete Werte $w^d \le c\langle(n_d),(\hat{n}_d)\rangle$ $(d=1,2)$ mit $w^1+w^2 = \nabla \le c\langle(n_1,n_2),(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\rangle$ zu wählen und die Schritte 1,2,3 mit $b^d := w^d$ zu wiederholen.

<u>Beispiel</u>

Für das in Fig.1 dargestellte Netzwerk überprüft man leicht, daß $c\langle(n_1),(\hat{n}_1)\rangle=6$, $c\langle(n_2),(\hat{n}_2)\rangle=12$ gilt. Einen (4,10)-zulässigen Doppelfluß z.B. erhält man durch Anwendung des Ford/Fulkerson-Algorithmus auf die Netze $(P^t,K^t,c^t_{(4,10)})$ (siehe Fig.2,3) und die durch die Tabelle beschriebene Transformation (6). Fig.4 zeigt die Endfiguration. Dieser Doppelfluß ist gleichzeitig maximal.

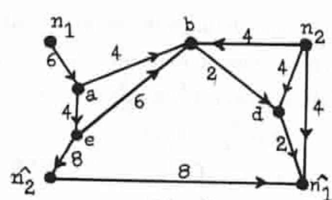

Fig.1

(i,j)	c_{ij}	f^1_{ij}	f^2_{ij}	x^1_{ij}	x^2_{ij}
(n_1,a)	6	4	4	4	0
(a,b)	4	0	4	2	-2
(a,e)	4	4	0	2	2
(e,b)	6	-4	2	-1	-3
$(e,\hat{n}_2)$	8	8	-2	3	5
$(\hat{n}_2,\hat{n}_1)$	8	-2	8	3	-5
(b,d)	2	0	2	1	-1
(n_2,b)	4	4	-4	0	4
(n_2,d)	4	2	-2	0	2
$(n_2,\hat{n}_1)$	4	4	-4	0	4
$(d,\hat{n}_1)$	2	2	0	1	1

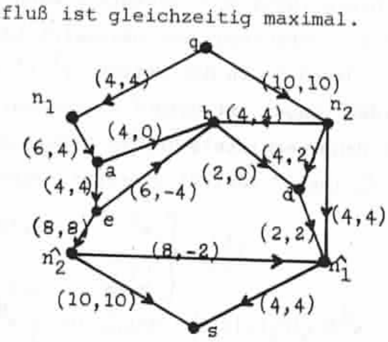

Fig.2

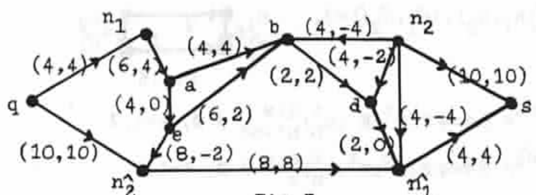

Fig.3

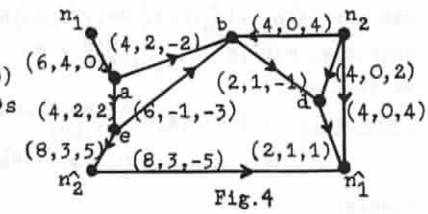

Fig.4

<u>Beweise zum Verfahren</u>

Wegen (4),(5) weiß man, für k=2 sind

$$b^d \le c\langle(n_d),(\hat{n}_d)\rangle,\ d=1,2 \text{ und } b^1+b^2 \le c\langle(n_1,n_2),(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\rangle \qquad (10)$$

$$\bar{v} \le c\langle(n_1,n_2),(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\rangle \qquad (11)$$

notwendig für die Existenz (b^1,b^2)-bzw. $\bar{v}$-zulässiger Doppelflüsse in (P,K,c). Zunächst wird gezeigt, daß diese Bedingungen hinreichend sind für die Existenz b^1+b^2- bzw. $\bar{v}$-zulässiger (Einzel-) Flüsse f^t in (P^t,K^t,c^t_b) bzw. (P^t,K^t,c^t_M).

<u>Lemma 1:</u> (i) Gilt (11), dann folgt $F(P^t,K^t,c^t_M)^{q;s}_{\bar{v}} \ne \emptyset$.

(ii) Gilt (10), dann folgt $F(P^t,K^t,c^t_b)^{q;s}_{b^1+b^2} \ne \emptyset$.

<u>Beweis:</u> Es wird t=1 gezeigt.

(i) Wegen $c^1_{Mij}=M$ für $(i,j)\in\bigcup_{d=1}^{2}K^{1d}$ (M hinreichend groß) wird eine minimale trennende Kantenmenge $\langle(q),(s)\rangle$ in (P^1,K^1,c^1_M) nie Kanten von $\bigcup_{d=1}^{2}K^{1d}$ enthalten. Bezeichnet $\breve{S}(P^1,K^1,c^1_M)^{q;s}$ die Menge dieser minimal trennenden Kantenmengen, dann gilt $\breve{S}(P^1,K^1,c^1_M)^{q;s} \subset S(P,K,c)^{n_1,n_2;\hat{n}_1,\hat{n}_2}$ und deshalb $c\langle(q),(s)\rangle \ge c\langle(n_1,n_2),(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\rangle \ge \bar{v}$.

(ii) Der Beweis erfolgt leicht durch Überprüfen aller trennenden Kantenmengen von $S(P^1,K^1,c^1_b)^{q;s}$. Gehöre $M^* \subset \{n_1,n_2,\hat{n}_1,\hat{n}_2\}$ zur q enthaltenden Komponente von $((q),(s))$, dann gilt: Fall 1: $\bigcap_{d=1}^{2}K^{1d}=\emptyset$.

1) $M^*=\{n_1\}$, $M^*=\{n_2\}$, $M^*=\{n_1,n_2,\hat{n}_1\}$, $M^*=\{n_1,n_2,\hat{n}_2\}$ $\Rightarrow$(Es wird nur $M^*=\{n_1\}$ gezeigt.) $((q),(s))\cap K \in S(P,K,c)^{n_1,\hat{n}_1}$ und $c((q),(s)) \ge c\langle(n_1),(\hat{n}_1)\rangle + b^2 \ge b^1+b^2$

2) $M^*=\{n_1,n_2\}$ $\Rightarrow ((q),(s)) \in S(P,K,c)^{n_1,n_2;\hat{n}_1,\hat{n}_2}$ und

$c((q),(s) \ge c\langle(n_1,n_2),(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\rangle \ge b^1+b^2$

3) $M^*=\{n_1,\hat{n}_2\}$, $M^*=\{\hat{n}_1,n_2\}$ $\Rightarrow$(Es wird nur $M^*=\{n_1,\hat{n}_2\}$ gezeigt.)

$((q),(s))\cap K \in \bigcap_{d=1}^{2} S(P,K,c)^{n_d;\hat{n}_d}$ und $c((q),(s)) \ge \max\{c\langle(n_d),(\hat{n}_d)\rangle\} + 2b^2 \ge b^1+b^2$

Für alle anderen Situationen $M^* \subset \{n_1,n_2,\hat{n}_1,\hat{n}_2\}$ gilt $c((q),(s)) \ge b^1+b^2$ nach Konstruktion von (P^1,K^1,c^1_b). Fall 2: $\bigcap_{d=1}^{2}K^{1d} \ne \emptyset$. Die Betrachtungsweise vereinfacht sich, da jetzt das Quadrupel $n_1,n_2,\hat{n}_1,\hat{n}_2$ aus weniger als vier verschiedenen Punkten (man beachte aber $n_d \ne \hat{n}_d$, d=1,2) besteht. Wieder gilt immer $c((q),(s)) \ge b^1 + b^2$.

Fig.5 zeigt, daß die Bedingungen (10),(11) für Lemma 1 nicht notwendig sind.

Man hat $c\langle(n_d),(\hat{n}_d)\rangle=3$, $d=1,2$, $c\langle(n_1,n_2),(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\rangle=3$,
aber z.B. $F(P^1,K^1,c^1_{(5,5)})^{q;s}_{5+5} \neq \emptyset$.

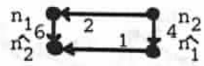

Fig.5

Es gilt aber

<u>Theorem 2:</u> (i) $F(P,K,c)^{n_1,n_2;\hat{n}_1,\hat{n}_2}_{(b^1,b^2)} \neq \emptyset \Longleftrightarrow F(P^t,K^t,c^t_b)^{q;s}_{b^1+b^2} \neq \emptyset$, $t=1,2$

(ii) $F(P,K,c)^{n_1,n_2;\hat{n}_1,\hat{n}_2}_{\nabla} \neq \emptyset \Longleftrightarrow F(P^t,K^t,c^t_M)^{q;s}_{\nabla} \neq \emptyset$, $t=1,2$

<u>Beweis:</u>

(i) Der Beweis folgt leicht mit Hilfe der Formeln (6),(7) durch entsprechendes Einsetzen und Umformen (siehe auch [3], wo auch ein anderer konstruktiver Beweis für (ii) gegeben wird).

(ii) Ist $F(P,K,c)^{n_1,n_2;\hat{n}_1,\hat{n}_2}_{\nabla} \neq \emptyset$, so gibt es auch einen $(v(x^1),v(x^2))$-zulässigen Doppelfluß (x^1,x^2) mit $v(x^1)+v(x^2) = \nabla$ und nach (i) folgt $F(P^t,K^t,c^t_M)^{q;s}_{\nabla} \neq \emptyset$, $t=1,2$, wenn man nur $M \geq \max\{v(x^d)\}$ wählt. Gilt umgekehrt $F(P^t,K^t,c^t_M)^{q;s}_{\nabla} \neq \emptyset$ für $t=1,2$, dann muß $\nabla \leq c\langle(n_1,n_2),(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\rangle$ gelten wegen $S(P,K,c)^{n_1,n_2;\hat{n}_1,\hat{n}_2} \subset \bigcup_{t=1}^{2} S(P^t,K^t,c^t_M)^{q;s}$. Dann kann man aber Werte $w^d \leq c\langle(n_d),(\hat{n}_d)\rangle$, $d=1,2$ mit $w^1+w^2 = \nabla$ finden (es gilt ja immer $\sum_{d=1}^{2} c\langle(n_d),(\hat{n}_d)\rangle \geq c\langle(n_1,n_2),(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\rangle$), nach Lemma 1 gilt $F(P^t,K^t,c^t_w)^{q;s}_{w^1+w^2} \neq \emptyset$, $t=1,2$ und nach (i) folgt $F(P,K,c)^{n_1,n_2;\hat{n}_1,\hat{n}_2}_{(w^1,w^2)} \neq \emptyset$, also die Existenz eines ∇-zulässigen Doppelflusses.

Es sei noch bemerkt, daß man, falls $F(P,K,z)^{n_1,n_2;\hat{n}_1,\hat{n}_2}_{z} = \emptyset$ gilt, in Spezialfällen (wie Fig.5 oder für $\bigcap_{d=1}^{2} K^{td} \neq \emptyset$) mittels der gemachten Überlegungen optimale Kapazitätsänderungen für z-zulässige Doppelflüsse leicht durch Anwendung bekannter Verfahren auf die Netze (P^t,K^t,c^t_M) (bzw. (P^t,K^t,c^t_b)) $t=1,2$ erhalten kann (siehe auch [3]).

<u>Literatur:</u>

[1] Ford,L.R. and D.R. Fulkerson: A Suggested Computation for Maximal Multi-Commodity Network Flows. ManagSc. 5 (1959) 97-101.

[2] Ford,L.R. und D.R. Fulkerson: Flows in Networks. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1962).

[3] Gaul,W.: Increasing the Capacity of a Multi-Commodity Network. submitted (1975).

[4] Gaul,W.: Über Flußprobleme in Netzwerken. Erscheint in ZAMM (1975).

[5] Gaul,W.: Eine Bemerkung zum Hu'schen Algorithmus zur Berechnung gleichzeitiger Flüsse. working paper (1974).

[6] Hu,T.C.: Multi-Commodity Network Flows. J.ORSA 11 (1963) 344-360.

[7] Hu,T.C.: Integer Programming and Network Flows. Addison-Wesley, Reading Mass. (1969).

[8] Rothschild,B. and A. Whinston: On Two Commodity Network Flows. J.ORSA 14 (1966) 377-387.

[9] Rothschild,B. and A.Whinston: Feasibility of Two Commodity Network Flows. J.ORSA 14 (1969) 1121-1129.

[10] Sakarovitch,M.: Two Commodity Flows and Lin.Programming.Math.Prog.4(1973) 1-20.