ISNM 29 Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1975

KAPAZITÄTSÄNDERUNGEN BEI NETZWERKEN

Wolfgang Gaul

Optimal capacity-alterations of networks and algorithms for their computation are considered which ensure the existence of multicommodity flows under constraints. The constraints describe restrictions which must be satisfied by the flow values. This problem is known and solved for the case when only one flow is under consideration. In this paper, it is shown how the multicommodity flow case can be handled.

1) Einleitung

Die Änderung der Kapazitätsstruktur (bzw. der Kantenstruktur) eines Netzes zur Anpassung an gewünschte Situationen ist eine Problemstellung, die in der Netzwerktheorie schon viel Beachtung gefunden hat. In der vorliegenden Arbeit sollen speziell Kapazitätsänderungen und Algorithmen zu ihrer Berechnung betrachtet werden, die die Existenz gleichzeitiger Flüsse verschiedener Beschaffenheit unter Nebenbedingungen in dem geänderten Netz sicherstellen. Die Nebenbedingungen beschreiben dabei Beschränkungen, denen die Flußwerte genügen müssen. Es wird dargelegt, in wieweit sich die für den Spezialfall der Betrachtung nur eines Flusses bekannten Problemlösungen auf allgemeinere Fälle übertragen lassen.

2) Formulierung des Problems

Sei $P=\{1,\dots,n\}$ die Punktmenge und $K\subset P\times P-\bigcup\{(i,i)\mid i\in P\}$ die Kantenmenge des endlichen, gerichteten, schlichten Graphen (P,K). Es werden zwei Typen von Kapazitätsgraphen betrachtet. (P,K,c) bzw. $[P,K,c]$ bezeichne einen vollständigen, symmetrischen bzw. antisymmetrischen, endlichen, gerichteten, schlichten Kapazitätsgraphen, in dem jeder Kante $(i,j)\in K$ vermittels $c\in R_+^{*K}$ ein Kapazitätsintervall $[0,c_{ij}]$ bzw. $[-c_{ij},c_{ij}]$ zugeordnet ist. Jedes Netzwerk (=zusammenhängender endlicher, gerichteter, schlichter Graph) mit der entsprechenden Kapazitätsstruktur läßt sich in der Form (P,K,c) bzw. $[P,K,c]$ darstellen, wenn man nicht existierende Kanten

als Kanten mit Nullkapazitäten interpretiert.
Die folgenden Begriffe werden für den (P,K,c)-Typ erklärt ([P,K,c]-Netze werden in Abschnitt 5) behandelt), sie gelten entsprechend auch in [P,K,c], andernfalls wird auf Unterschiede zum Zeitpunkt ihres Auftretens hingewiesen.
In (P,K,c) nennt man das k-tupel $(x^1,\dots,x^k)$, $x^d: K\to R$ für $d=1,\dots,k$, unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} Ix^d &= v^d \quad (d=1,\dots,k) \\ \sum_{d=1}^{k} x^d &\leq c \\ x^d &\geq 0 \quad (d=1,\dots,k) \end{aligned} \qquad \text{mit } v^d \in R^n, [v^d]_j = \begin{cases} v(x^d) & j=n_d \\ 0 & j\neq n_d, \hat{n}_d \\ -v(x^d) & j=\hat{n}_d \end{cases}$$

wobei $n_d, \hat{n}_d \in P$, $n_d \neq \hat{n}_d$ ausgezeichnete Punkte sind, k gleichzeitige Flüsse verschiedener Beschaffenheit. $n_d, \hat{n}_d$ heißt Quelle bzw. Senke des d-ten Flusses. I ist die (Punkt-Kante-) Inzidenzmatrix von (P,K,c). $v(x^d)$ ist der Wert des d-ten Flusses, $v(x^1,\dots,x^k) := \sum_{d=1}^{k} v(x^d)$ der Wert von $(x^1,\dots,x^k)$.
Für $b=(b^1,\dots,b^k)' \in R_+^k$ heißt $(x^1,\dots,x^k)$ b-zulässig, wenn $v(x^d) \geq b^d$ für $d=1,\dots,k$ gilt.
Für $\bar{v} \in R_+$ heißt $(x^1,\dots,x^k)$ $\bar{v}$-zulässig, wenn $v(x^1,\dots,x^k) \geq \bar{v}$ gilt. Die Menge der k gleichzeitigen Flüsse verschiedener Beschaffenheit in (P,K,c) sei mit $F^k(P,K,c)$, die Menge der b- bzw. $\bar{v}$-zulässigen k gleichzeitigen Flüsse mit $F^k(P,K,c)_b$ bzw. $F^k(P,K,c)_{\bar{v}}$ bezeichnet.
Kantenmengen, die minimal sind mit der Eigenschaft, daß ihre Herausnahme aus dem Netz n_d von $\hat{n}_d$, $n_d \neq \hat{n}_d (d=1,\dots,k)$, trennen würde, seien mit $((n_1,\dots,n_k),(\hat{n}_1,\dots,\hat{n}_k)) \subset K$ bezeichnet. Die Menge solcher trennenden Kantenmengen bzgl. der k Punktepaare n_d, $\hat{n}_d (n_d \neq \hat{n}_d)$ sei mit $S^k(P,K,c)$ bezeichnet. Jeder trennenden Kantenmenge ist als Wert $c((n_1,\dots,n_k),(\hat{n}_1,\dots,\hat{n}_k)) := \sum_{(i,j)\in((n_1,\dots,n_k),(\hat{n}_1,\dots,\hat{n}_k))} c_{ij}$ zugeordnet; von besonderem Interesse sind trennende Kantenmengen mit minimalem Wert, bezeichnet mit $\langle(n_1,\dots,n_k),(\hat{n}_1,\dots,\hat{n}_k)\rangle$.
$y \in R^{*K}$ mit $c+y \geq 0$ heißt Kapazitätsänderung von (P,K,c), $y \in R_+^{*K}$ heißt spezieller Kapazitätserweiterung. Insbesondere nennt man y b-zulässig bzw. $\bar{v}$-zulässig, wenn $F^k(P,K,c+y)_b \neq \emptyset$ bzw. $F^k(P,K,c+y)_{\bar{v}} \neq \emptyset$ gilt.

Für $\bar{c} \in R_+$ heißt y $\bar{c}$-zulässig, wenn die Bedingung
$\bar{c} \leq \min\limits_{S^k(P,K,c+y)} c((n_1,..,n_k),(\hat{n}_1,..,\hat{n}_k))$ erfüllt ist.

Gesucht sind Kapazitätsänderungen, die unter den obigen Nebenbedingungen gegebene Kosten minimieren bzw. unter Berücksichtigung der Nichtüberschreitung eines Budget $B \in R_+$

$$\max_y \max_{F^k(P,K,c+y)} v(x^1,..,x^k) \quad , \quad \max_y \min_{S^k(P,K,c+y)} c((n_1,..,n_k),(\hat{n}_1,..,\hat{n}_k)) \text{ oder}$$

$$\min_y \min_{F^k(P,K,c+y)} ||b-(v(x^1),..,v(x^k))'|| \text{ liefern.}$$

3) Bekannte Problemlösungen

Für den Spezialfall k=1 kennt man Lösungen für die oben beschriebenen Situationen. Man hätte in diesem Fall gar nicht zwischen b- bzw. $\bar{v}$-zulässigen Lösungen zu unterscheiden brauchen. Auch zwischen $\bar{v}$- und $\bar{c}$-zulässigen Lösungen wäre keine Unterscheidung nötig gewesen, denn es gilt die für die Netzwerktheorie grundlegende Aussage

<u>SATZ 1</u>: (Ford/Fulkerson)

$$\tilde{v}(x^1) = \max_{F^1(P,K,c)} v(x^1) = \min_{S^1(P,K,c)} c((n_1),(\hat{n}_1)) = c\langle(n_1),(\hat{n}_1)\rangle$$

Für k=1 gibt es Arbeiten über Kapazitätserweiterungen: Fulkerson [6] benutzt einen Primal-Dual-Algorithmus vergleichbar mit dem "Out of Kilter Algorithm" von Ford/Fulkerson [5] zur Berechnung kostenminimaler Flüsse. Hammer [9] verwendet Boole'sche Optimierung, Hu [11] ein modifiziertes Verfahren zur Berechnung kürzester Wege. Price [12] und jetzt in neuester Zeit Christofides/Brooker [2] benutzen "Branch and Bound"- Verfahren zur Lösung des Problems. Dabei werden in [2], [9], [12] die kombinatorischen Aspekte des Problems stärker betont, für die Kantenteilmengen sind nur Änderungen um fest vorgegebene Werte möglich, während in [6], [11] kontinuierliche Änderungen unter Berücksichtigung linearer Kosten betrachtet werden.

Auf den allgemeinen Fall (k beliebig, aber endlich) läßt sich Satz 1 nicht übertragen, man kann nur

$$\tilde{v}(x^1,..,x^k) \leq c\langle(n_1,..,n_k),(\hat{n}_1,..,\hat{n}_k)\rangle$$

folgern und Beispiele für echte Ungleichheit angeben.

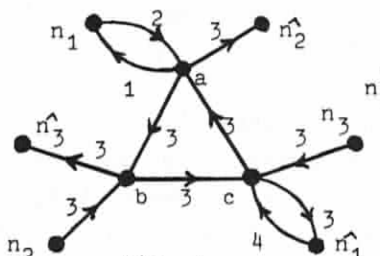

Fig. 1

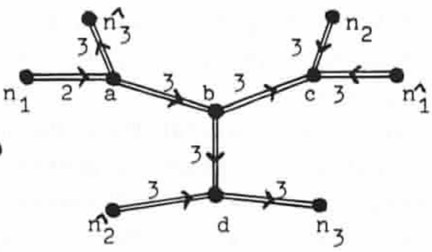

Fig. 2

In beiden Figuren beschreiben die den Kanten zugeordneten Ziffern die Kapazitäten, Kanten mit Nullkapazitäten sind weggelassen worden. Fig. 2 beschreibt ein vollständiges, antisymmetrisches Netz, in dessen Kanten in jede Richtung Fluß bis zur Kapazitätsgrenze möglich ist (siehe Abschnitt 5)).

In beiden Fällen existieren genau eine trennende Kantenmenge mit minimalem Wert $\langle(n_1,n_2,n_3),(\hat{n}_1,\hat{n}_2,\hat{n}_3)\rangle$ der Gestalt $\{(n_1,a),(c,a)\}$ bzw. $\{(n_1,a),(b,d)\}$ und gleichzeitige Flüsse mit Werten $v(x^1)=1{,}5$, $v(x^2)=1{,}5$, $v(x^3)=1{,}5$. Man folgert leicht, daß in beiden Fällen auch

$$\check{v}(x^1,x^2,x^3)=4{,}5<c\langle(n_1,n_2,n_3),(\hat{n}_1,\hat{n}_2,\hat{n}_3)\rangle=5$$

gilt. Das Erweitern der Kapazität der Kante (n_1,a) um eine Einheit wäre in beiden Fällen eine $(\bar{c}=6)$- zulässige Kapazitätsänderung, durch die der maximale Flußwert $\check{v}(x^1,x^2,x^3)$ nicht erhöht werden kann. Umgekehrt ergäbe in beiden Fällen das Erweitern der Kapazität der Kante (a,b) um eine Einheit eine $(\bar{v}=5)$- zulässige Kapazitätsänderung mit $v(x^1)=2$, $v(x^2)=1$, $v(x^3)=2$ und $\check{v}(x^1,x^2,x^3)=5$, die den Wert der minimal trennenden Kantenmenge nicht vergrößert.

Es ist deshalb sinnvoll, zwischen $\bar{c}$- und $\bar{v}$- zulässigen Kapazitätsänderungen zu unterscheiden. Bellmore/Ratliff [1] haben sich mit $\bar{c}$- zulässigen Kapazitätserweiterungen befaßt und auch ein kombinatorisches Verfahren zur Berechnung minimaler trennender Kantenmengen für k Punktepaare angegeben. Diese Arbeit enthält im Literaturverzeichnis auch Angaben über Autoren, die sich mit $\bar{c}$- zulässigen Kapazitätsänderungen für den Fall k=1 beschäftigt haben.

Für den Rest dieser Arbeit werden nur b- bzw. $\bar{v}$- zulässige Kapazitätserweiterungen betrachtet.

4) Ein Lösungsvorschlag für den allgemeinen Fall

Sei $W=\bigcup_{d=1}^{k}W^d$ und $W^d=\{w_1^d,\ldots,w_{n(d)}^d\}$ die Menge aller (elementaren) Wege von n_d nach $\hat{n}_d$. Sei x_e^d der Betrag des d-ten Flusses im Weg w_e^d. Die Matrix

$$M^d=(m_{ije}^d) \text{ mit } m_{ije}^d=\begin{cases}1 & (i,j)\in w_e^d\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

heißt (Kante-Weg-) Inzidenzmatrix bzgl. $n_d, \hat{n}_d$.
Sei $M=(M^1,..,M^k)$ mit $M^d=(m_1^d,..,m_{n(d)}^d)$ und $m_e^d \in R^{*K}$. Sei $X^d=(x_1^d,..,x_{n(d)}^d)'$, $E^d=(1,..,1)' \in R^{n(d)}$, $X=(X^{1'},..,X^{k'})'$, $E=(1,..,1)' \in R^{\sum_{d=1}^{k} n(d)}$, dann bestimmen die Optimallösungen der linearen Programme

$$\begin{array}{ll} \min p'y \\ MX \quad -y \leq c \\ E'X \quad \geq \bar{v} \\ X \geq 0,\ y \geq 0 \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{l} \min p'y \\ \sum_{d=1}^{k} M^d X^d \quad -y \leq c \\ E^{d'} X^d \quad \geq b^d \quad (d=1,..,k) \\ X^d \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}$$

die gesuchten $\bar{v}$- bzw. b- zulässigen Kapazitätserweiterungen. $p \in R^{*K}$ beschreibt die Kosten pro Einheit für die Kapazitätserweiterung. Allerdings ist bei den in dieser Form beschriebenen Problemstellungen die vorausgesetzte Kenntnis der Vielzahl der Wege (der Spalten von M) störend und ihre Berechnung langwierig. Von Vorteil ist hier, wenn man für den Basistausch einen Teil der durch die revidierte Simplexmethode mitgelieferten sogenannten Simplexmultiplikatoren zur Festlegung von nicht negativen Werten benutzt, die man als Kantenlängen des betrachteten Netzes interpretiert. Zur Überprüfung der augenblicklichen Basislösung auf Optimalität hat man dann k kürzeste-Weg-Berechnungen (jeweils für die Punktepaare $n_d, \hat{n}_d$) durchzuführen. Einer der die kürzesten Wege $\tilde{w}^d$ bestimmenden Vektoren $\tilde{m}^d$ (mit $\tilde{m}_{ij}^d=1$ für $(i,j) \in \tilde{w}^d$, $\tilde{m}_{ij}^d=0$ sonst) ist dann Kandidat für die auszutauschende Matrixspalte. Der wesentliche Vorteil ist hier, daß man die große Anzahl der Wege (bzw. Spalten von M) nicht explizit zu kennen braucht. Bei jedem Austauschschritt ist aber das Problem der Bestimmung kürzester Wege, für das eine Vielzahl guter Algorithmen bekannt sind, zu lösen. Diese Idee wurde zuerst von Ford/Fulkerson [4] zur Berechnung gleichzeitiger Flüsse verschiedener Beschaffenheit mit maximalem Wert benutzt. Wichtig ist dabei die Auswahl effizienter Verfahren zur Bestimmung kürzester Wege (siehe z.B. Dreyfus [3] oder Hu [11], wo ein Verfahren zur gleichzeitigen Berechnung der kürzesten Wege zwischen allen Punktepaaren eines Netzes beschrieben wird). Die Überlegungen können auch zur Überprüfung der Existenz k gleichzeitiger Flüsse unter den gemachten Nebenbedingungen und, falls in den Optimallösungen y=0 gilt, zur expliziten Angabe solcher Flüsse benutzt werden (siehe auch Gaul [8]). Die Einbeziehung von Budgetbeschränkungen läßt sich nach obigem Schema ebenfalls behandeln. Man erhält die Probleme

$$\begin{array}{lll} \max E'X & \text{bzw.} & \min \sum_{d=1}^{k} (b^d - E^{d\prime} X^d) \\ MX - y \leq c & & \sum_{d=1}^{k} M^d X^d - y \leq c \\ p'y \leq B & & E^{d\prime} X^d \leq b^d \quad (d=1,\dots,k) \\ X \geq 0, y \geq 0 & & p'y \leq B \\ & & X^d \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

für die entsprechende Überlegungen gelten.

5) Reduktionsmöglichkeiten im Fall zweier gleichzeitiger Flüsse

Während in 4) zur Änderung der Kapazitätsstruktur lineare Programme herangezogen wurden, können in diesem Abschnitt alle für den Fall k=1 bekannten Verfahren zur Kapazitätsänderung benutzt werden.
In diesem Abschnitt werden Netzwerke vom Typ [P,K,c] betrachtet. Für solche Netze hat zuerst Hu [11] die Gültigkeit von

SATZ 2:

$$\tilde{v}(x^1,x^2) = \max_{F^2[P,K,c]} v(x^1,x^2) = \min_{S^2[P,K,c]} c((n_1,n_2),(\hat{n}_1,\hat{n}_2)) = c\langle(n_1,n_2),(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\rangle$$

bewiesen und Aussagen über die Existenz (b^1,b^2)- zulässiger bzw. $\bar{v}$- zulässiger Doppelflüsse (= zwei gleichzeitige Flüsse verschiedener Beschaffenheit) angegeben. Rothschild/Whinston [13], [14] und Sakarovitch [15] haben sich ebenfalls mit diesen Problemen befaßt und neue und teilweise auch Verallgemeinerungen bekannter Resultate angegeben. Dabei beschreibt ein Teil der Aussagen Bedingungen, unter denen man sogar ganzzahlige (b^1,b^2)- bzw. $\bar{v}$- zulässige Doppelflüsse (Für k=1 genügt wegen der Unimodularität der Inzidenzmatrix die Ganzzahligkeit der Werte v,b und c_{ij}.) finden kann.
In [P,K,c] heißt (x^1,x^2) Doppelfluß, wenn gilt

(1) $Ix^1=v^1 \qquad Ix^2=v^2$

(2) $|x^1|+|x^2|\leq c$

Da die Bedingung (2) den Ungleichungen $-c\leq x^1+x^2\leq c$, $-c\leq x^1-x^2\leq c$ entspricht, erhält man vermittels

(3) $x^1=\frac{1}{2}(f^1+f^2) \qquad x^2=\frac{1}{2}(f^1-f^2)$

mit $f^1:=x^1+x^2$, $f^2:=x^1-x^2$ die zu (1'),(2) äquivalenten Systeme

$$If^1=v^1+v^2 \qquad\qquad If^2=v^1-v^2$$
$$-c\leq f^1\leq c \qquad\qquad -c\leq f^2\leq c$$

die jeweils ein Flußproblem mit zwei Quellen n_1,n_2 bzw. $n_1,\hat{n}_2$ und zwei Senken $\hat{n}_1,\hat{n}_2$ bzw. $\hat{n}_1,n_2$ repräsentieren. Man führt deshalb folgende Netze $[P^h,K^h,c^h]$,h=1,2,ein mit den Bedingungen

$$P^h=P\cup\{q,s\},\ K^h=K\cup\{(q,i)\mid i\in P^h-q\}\cup\{(i,s)\mid i\in P\}$$

$$c^h_{ij}=\begin{cases} c_{ij} & (i,j)\in K \\ b^1+b^2 & (i,j)\in \bigcap_d K^{hd} \\ b^d & (i,j)\in K^{hd}-\bigcap_d K^{hd} \\ 0 & (i,j)\in K^h-(\bigcap_d K^{hd}\cup K)\end{cases} \quad \text{oder} \quad c^h_{ij}=\begin{cases} c_{ij} & (i,j)\in K \\ M & (i,j)\in\bigcup_d K^{hd} \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

(M hinreichend groß gewählt), je nachdem, ob (b^1,b^2)- zulässige oder $\bar{v}$- zulässige bzw. maximale Doppelflüsse gesucht werden. Dabei haben die Kantenmengen K^{hd} die Gestalt $K^{11}=K^{21}=\{(q,n_1),(\hat{n}_1,s)\}$, $K^{12}=\{(q,n_2),(\hat{n}_2,s)\}$, $K^{22}=\{(q,\hat{n}_2),(n_2,s)\}$. Die Darstellung berücksichtigt auch Spezialfälle, in denen das Quadrupel $(n_1,\hat{n}_1,n_2,\hat{n}_2)$ (man beachte $n_d\neq\hat{n}_d$) aus weniger als vier verschiedenen Punkten besteht. In solchen Fällen tritt $\bigcap_d K^{hd}\neq\emptyset$ auf. Es gilt

<u>SATZ 3:</u>

(i) $F^2[P,K,c]_{(b^1,b^2)}\neq\emptyset \iff \begin{cases} F^1[P^1,K^1,c^1]_{b^1+b^2}\neq\emptyset \\ F^1[P^2,K^2,c^2]_{b^1+b^2}\neq\emptyset\end{cases}$

(ii) $\breve{v}=\max\{\bar{v}\mid F^2[P,K,c]_{\bar{v}}\neq 0\} \iff$
$\breve{v}=\min\{\max\{\bar{v}\mid F^1[P^1,K^1,c^1]_{\bar{v}}\neq\emptyset\},\max\{\bar{v}\mid F^1[P^2,K^2,c^2]_{\bar{v}}\neq\emptyset\}\}$

Zum Beweis siehe man Gaul [7]. Der Satz liefert z.B. die Grundlage für einen Algorithmus zur Berechnung (b^1,b^2)-zulässiger bzw. $\bar{v}$- zulässiger oder maximaler Doppelflüsse (aus Bedingung (ii) folgt $F^2[P,K,c]_{\bar{v}}\neq\emptyset\iff F^1[P^1,K^1,c^1]_{\bar{v}}\neq\emptyset$, $F^1[P^2,K^2,c^2]_{\bar{v}}\neq\emptyset$). In dem in dieser Arbeit behandelten Zusammenhang ist Satz 3 für den Nachweis von Aussagen über Kapazitätserweiterungen (abgekürzt:KE) von Wichtigkeit. Sei $v_h=\max\{\bar{v}\mid F^1[P^h,K^h,c^h]_{\bar{v}}\neq\emptyset\}$,dann folgt sofort

<u>SATZ 4:</u>

(i) $v_1<v_2 \implies$ y ist optimale, v_2- zulässige KE für $[P,K,c]$
$\iff (y',y_1')'$ ist optimale, v_2-zulässige KE für $[P^1,K^1,c^1]$

(ii) $v_1 > v_2 \Rightarrow y$ ist optimale, v_1- zulässige KE für $[P,K,c]$
$\Longleftrightarrow (y',y_2')'$ ist optimale, v_1- zulässige KE für $[P^2,K^2,c^2]$

Dabei gelte: y ist KE für $[P,K,c] \Leftrightarrow (y',y_h')'$ ist KE für $[P^h,K^h,c^h]$ mit $y_h := 0$, wobei y_h den Kanten aus $K^h - K$ zugeordnet ist.

Beweis:
Der Beweis folgt aufgrund der Kenntnis von Satz 3 leicht aus Widerspruchsannahmen. Es wird (i) bewiesen: Sei $v_1 < v_2$. $(y',y_1')'$ ist optimale, v_2- zulässige KE für $[P^1,K^1,c^1] \Longrightarrow (y',y_2')'$ ist v_2- zulässige KE für $[P^2,K^2,c^2] \Rightarrow y$ ist v_2- zulässige KE für $[P,K,c]$. Annahme: $\bar{y}$ ist v_2- zulässige KE für $[P,K,c]$ mit geringeren Kosten $\Longrightarrow (\bar{y}',y_1')'$ ist v_2- zulässige KE für $[P^1,K^1,c^1]$ mit geringeren Kosten als $(y',y_1')'$. Umgekehrt folgert man entsprechend: y optimale v_2- zulässige KE für $[P,K,c] \Longrightarrow (y',y_1')'$ ist optimale, v_2- zulässige KE für $[P^1,K^1,c^1]$, sonst ergibt sich ein Widerspruch zur vorausgesetzen optimalen Wahl von y.

Sei $U^h = \{u_1^h,\ldots,u_{m(h)}^h\}$ die Menge der (elementaren) Pfade von q nach s in $[P^h,K^h,c^h]$ (für Pfade müssen im Gegensatz zu den Wegen die Kantenrichtungen nicht notwendig in Durchlaufungsrichtung orientiert sein) und $K(u_e^h) = K^+(u_e^h) \cup K^-(u_e^h)$ die Kantenmenge von u_e^h, wobei $K^+(u_e^h)$ bzw. $K^-(u_e^h)$ die Kanten in bzw. gegen die Durchlaufungsrichtung beschreibt.

$$M^h = (m_{iju}^h) \quad \text{mit} \quad m_{iju}^h = \begin{cases} +1 & (i,j) \in K^+(u^h) \\ -1 & (i,j) \in K^-(u^h) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad u^h \in U^h,$$

heißt (Kante-Pfad-) Inzidenzmatrix, $f^h \in R_+^{m(h)}$ mit
$\sum_{U^h} f_u^h = v(f^h)$, $-c_{ij}^h \le \sum_{U^h} m_{iju}^h f_u^h \le c_{ij}^h$ für $(i,j) \in K^h$
Fluß vom Wert $v(f^h)$ in Kante-Pfad-Darstellung für $[P^h,K^h,c^h]$. Es gibt immer eine Darstellung, in der für jede Kante $(i,j) \in K^h$ die Pfadflußkomponenten $m_{iju}^h\ f_u^h$ $(u^h \in U^h)$ gleichgerichtet, d.h. entweder alle nicht negativ oder nicht positiv sind. Außerdem beachte man, daß in $[P^h,K^h,c^h]$ nur in den Pfaden der Menge $U(h) = \{u^h \mid K(u^h) \subset \bigcup_d K^{hd} \cup K\}$ Pfadflußkomponenten $m_{iju}^h f_u^h \neq 0$ möglich sind.

SATZ 5:

$\bigcap_d K^{hd} \neq \emptyset \Rightarrow$ y ist optimale (b^1,b^2)- bzw. $\bar{v}$- zulässige KE für $[P,K,c] \Longleftrightarrow (y',y'_h)'$ ist optimale b^1+b^2- bzw. $\bar{v}$- zulässige KE für $[P^h,K^h,c^h]$

Beweis:

Es wird der Fall h=2 bewiesen. Es sei $n_1=\hat{n}_2$ (Entsprechendes folgert man für $\hat{n}_1=n_2$. Gilt $n_1=\hat{n}_2$ und $\hat{n}_1=n_2$ gleichzeitig, lassen sich die Überlegungen wesentlich vereinfachen.).

Es gilt zunächst

1) $(y',y'_2)'$ z- zulässige KE für $[P^2,K^2,c^2] \Longrightarrow (y',y'_1)'$ ist z- zulässige KE für $[P^1,K^1,c^1]$

Für $z=\bar{v}$ ist dies unmittelbar einsichtig, denn U(1) enthält den Pfad $u_o=\{(q,n_1=\hat{n}_2),(n_1=\hat{n}_2,s)\}$, und man braucht nur $M=\bar{v}$ zu wählen. Für $z=b^1+b^2$ muß $U(1)-u_o$ den Durchfluß von $\max\{b^1,b^2\}$ gestatten. Es genügt zu zeigen:

Ist $U=U(n_1=\hat{n}_2,\hat{n}_1)\cup U(n_1=\hat{n}_2,n_2)$ die Menge der elementaren Pfade von $n_1=\hat{n}_2$ nach $\hat{n}_1$ bzw. n_2 mit Kanten in K und $f\in R_+^{*U}$ eine U benutzende Kante-Pfad-Fluß Darstellung mit für die einzelnen Kanten gleichgerichteten Pfadflußkomponenten und

$$\sum_{U(n_1=\hat{n}_2,\hat{n}_1)} f_u=b^1,\quad \sum_{U(n_1=\hat{n}_2,n_2)} f_u=b^2,\quad -c_{ij}-y_{ij}\leq\sum_U m_{iju}f_u\leq c_{ij}+y_{ij},\ (i,j)\in K$$

so folgt durch Umorientierung der Pfade von $U(n_1=\hat{n}_2,n_2)$ (- u bezeichne den aus u entstandenen umorientierten Pfad) für die Menge

$$\breve{U}=U(n_1=\hat{n}_2,\hat{n}_1)\cup U(n_2,n_1=\hat{n}_2) \text{ mit}$$

$$\breve{m}_{iju}=\begin{cases} m_{iju} & u\in U(n_1=\hat{n}_2,\hat{n}_1)\\ -m_{ij(-u)} & u\in U(n_2,n_1=\hat{n}_2)\end{cases}$$

und den Fluß $\breve{f}$ mit $\breve{f}_{u_1}=f_u$ $(u\in U(n_1=\hat{n}_2,\hat{n}_1)),\ \breve{f}_{u_2}=f_{(-u)}$ $(u\in U(n_2,n_1=\hat{n}_2))$

$$\sum_{U(n_1=\hat{n}_2,\hat{n}_1)} \breve{f}_u=b^1,\qquad \sum_{U(n_2,n_1=\hat{n}_2)} \breve{f}_u=b^2 \qquad \text{und}$$

$$\sum_{U(n_1=\hat{n}_2,\hat{n}_1)} m_{iju}f_u=0 \Rightarrow -c_{ij}-y_{ij}\leqslant\sum_{\breve{U}}\breve{m}_{iju}\breve{f}_u=-\sum_U m_{iju}f_u\leq c_{ij}+y_{ij}$$

$$\sum_{U(n_1=\hat{n}_2,\hat{n}_1)} m_{iju}f_u>0 \Rightarrow \sum_{U(n_1=\hat{n}_2,n_2)} m_{iju}f_u\geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases}\sum_{\breve{U}}\breve{m}_{iju}\breve{f}_u=\sum_U m_{iju}f_u-2\sum_{U(n_1=\hat{n}_2,n_2)} m_{iju}f_u\leqslant c_{ij}+y_{ij}\\ \sum_{\breve{U}}\breve{m}_{iju}\breve{f}_u=-\sum_U m_{iju}f_u+2\sum_{U(n_1=\hat{n}_2,\hat{n}_1)} m_{iju}f_u>-c_{ij}-y_{ij}\end{cases}$$

Entsprechendes gilt für $\sum_{U(n_1=\hat{n}_2,\hat{n}_1)} m_{iju} f_u < 0$.
f ist aber die Reduktion eines b^1+b^2- zulässigen Flusses f^2 für das erweiterte Netz $[P^2,K^2,c^2+(y',y'_2)']$, vermittels $\check{f}$ läßt sich sofort ein b^1+b^2- zulässiger Fluß f^1 für $[P^1,K^1,c^1+(y',y'_1)']$ angeben.
2) Nach 1) und Satz 3 folgt: $(y',y'_2)'$ optimale b^1+b^2- bzw. $\bar{\nabla}$- zulässige KE für $[P^2,K^2,c^2] \Longrightarrow y$ ist optimale (b^1,b^2)- bzw. $\bar{\nabla}$- zulässige KE für $[P,K,c]$, denn die Existenz einer Lösung $\bar{y}$ mit geringeren Kosten hätte zur Folge, daß $(\bar{y}',y'_2)'$ eine b^1+b^2- bzw. $\bar{\nabla}$- zulässige Lösung für $[P^2,K^2,c^2]$ mit geringeren Kosten als $(y',y'_2)'$ wäre.
Die Umkehrung folgt wegen Satz 3 wie im Beweis zu Satz 4.

Kenntman bei den Ungleichungen

$$
\begin{array}{lll}
(4) & b^d \leq c\langle(n_d),(\hat{n}_d)\rangle \quad, d=1,2 \quad, & \\
(5) & z \leq c\langle(n_1 \ast n_2),(\hat{n}_1 \ast \hat{n}_2)\rangle & \text{für } z=b^1+b^2 \text{ bzw. } z=\bar{\nabla} \\
(6) & z \leq c\langle(n_1 \ast \hat{n}_2),(\hat{n}_1 \ast n_2)\rangle &
\end{array}
$$

schon die Werte $c\langle(n_d),(\hat{n}_d)\rangle$, $c\langle(n_1 \ast n_2),(\hat{n}_1 \ast \hat{n}_2)\rangle$, $c\langle(n_1 \ast \hat{n}_2),(\hat{n}_1 \ast n_2)\rangle$,wobei die Operation $i \ast j$ die Zusammenziehung der Punkte i,j zu einem Punkt (mit entsprechender Kapazitätsänderung) beschreibt, so genügt zur Überprüfung der Netze $[P^h,K^h,c^h]$ der in [7] bewiesene

<u>SATZ 6</u>:

$$
F^1[P^h,K^h,c^h]_z \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{Für } \begin{array}{l} z=\bar{\nabla} \text{ gilt (5)((6)) für } h=1(2) \\ z=b^1+b^2 \text{ gilt (4) und (5)((6)) für } h=1(2) \end{array}
$$

Die obigen Aussagen beschreiben Situationen, in denen zumindest eine der Bedingungen $F^1[P^h,K^h,c^h]_z \neq \emptyset$, $h \in \{1,2\}$, $z=\bar{\nabla}$ oder $z=b^1+b^2$, erfüllt ist, oder in denen aus der Gültigkeit der einen die der anderen folgt. In allen diesen Fällen ist die Angabe einer optimalen (b^1,b^2)- bzw. $\bar{\nabla}$- zulässigen KE für $[P,K,c]$ leicht zu bewerkstelligen.
Man braucht dann eines der für den Fall $k=1$ bekannten Verfahren nur auf dasjenige Netz anzuwenden, für das noch $F^1[P^h,K^h,c^h]_z = \emptyset$ gilt, bzw. für das aus der Gültigkeit von $F^1[P^h,K^h,c^h+(y',y'_h)']_z \neq \emptyset$ allein schon $F^2[P,K,c+y]_{(b^1,b^2)} \neq \emptyset$ bzw. $F^2[P,K,c+y]_{\bar{\nabla}} \neq \emptyset$ folgt.

References

[1] Bellmore,M. and H.D.Ratliff:Optimal Defense of Multi-commodity Networks. Managm.Sc.18(1971), 174-185.
[2] Christofides,N. and P.Brooker:Optimal Expansion of an Existing Network. Math.Progr.6 (1974), 197-211.
[3] Dreyfus,S.E.:An Appraisal of Some Shortest-Path Algorithms. J.ORSA 17 (1969), 395-412.
[4] Ford,L.R. and D.R.Fulkerson:A Suggested Computation for Maximal Multi-commodity Network Flows. Managm.Sc. 5 (1959), 97-101.
[5] Ford,L.R. and D.R.Fulkerson:Flows in Networks. Princetown University Press. Princetown,N.Y. (1962).
[6] Fulkerson,D.R.:Increasing the Capacity of a Network: The Parametric Budget Problem. Managm.Sc.5 (1959), 472-483.
[7] Gaul,W.:Increasing the Capacity of a Multi-commodity Network.Submitted.
[8] Gaul,W.:r-satisfying Multi-commodity Flows and Capacity-alterations of Networks. to appear in Balcan.Math.
[9] Hammer,P.L.:Increasing the Capacity of a Network. CORS J.7 (1969), 83-91.
[10] Hess,M.L.:An Observation on the Branch and Bound Method of Price. CORS J.6 (1968), 58-59.
[11] Hu,T.C.:Integer Programming and Network Flows. Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).
[12] Price,W.L.:Increasing the Capacity of a Network where the Costs are non-linear:A Branch and Bound Algorithm. CORS J.5 (1967), 100-114.
[13] Rothschild,B. and A.Whinston:On Two Commodity Network Flows. J.ORSA 14 (1966), 377-387.
[14] Rothschild,B. and A.Whinston:Feasibility of Two Commodity Network Flows. J.ORSA 14 (1966), 1121-1129.
[15] Sakarovitch,M.:Two Commodity Network Flows and Linear Programming. Math.Progr.4 (1973), 1-20.

Wolfgang Gaul
Institut für Angewandte Mathematik und Informatik
der Universität Bonn
53 Bonn
Wegelerstraße 6

West Germany