Zeitschrift für Operations Research, Band 19, 1975, Seite 89 – 99. Physica-Verlag, Würzburg.

Einige Aspekte in der Zuordnungstheorie[1])

Von *W. Gaul*, Bonn[2]) und *A. Heinecke*, Münster[3])

Eingegangen am 21. Mai 1974

Zusammenfassung: Gegeben seien endliche Mengen X, Y und $Z \subset X \times Y$, $Z_x = \{y \mid (x,y) \in Z\}$, $Z_y = \{x \mid (x,y) \in Z\}$.

Man nennt $A \subset X$ (bzw. $B \subset Y$) *zuordenbar*, wenn es eine Injektion $\rho: A \to Y$ (bzw. $\psi: B \to X$) mit $\rho(x) \in Z_x$ (bzw. $\psi(y) \in Z_y$) gibt, und (A,B) mit $\# A = \# B > 0$ ein *Zuordnungspaar*, wenn eine Bijektion $f: A \to B$ mit $f(x) \in Z_x \cap B$ (bzw. $f^{-1}(y) \in Z_y \cap A$) existiert. Die Bijektion f heißt *Zuordnungsplan* für A, B.

In der vorliegenden Arbeit werden Fragen nach der Existenz von optimal zuordenbaren Mengen und optimalen Zuordnungspaaren behandelt, wenn man auf den Mengen X und Y Ordnungen vorgibt, wobei auch Nebenbedingungen berücksichtigt werden. In manchen Fällen lassen sich anhand der Beweise Zuordnungspläne oder ihre Berechnungsvorschrift explizit angeben.

Zum Schluß werden die Aussagen an konkreten, dem Bereich der Wirtschaftswissenschaften entnommenen Beispielen erläutert.

Summary: Let X, Y be finite sets and $Z \subset X \times Y$, $Z_x = \{y \mid (x,y) \in Z\}$, $Z_y = \{x \mid (x,y) \in Z\}$.

$A \subset X$ (resp. $B \subset Y$) is called *assignable* if there is an injection $\rho: A \to Y$ (resp. $\psi: B \to X$) with $\rho(x) \in Z_x$ (resp. $\psi(y) \in Z_y$), (A,B) with $\# A = \# B > 0$ an *assigned pair* if there is a bijection $f: A \to B$ with $f(x) \in Z_x \cap B$ (resp. $f^{-1}(y) \in Z_y \cap A$). The bijection f is called a *plan* for A and B.

In this paper problems are discussed concerning the existence of optimal assignable sets and optimal assigned pairs if X and Y are totally ordered, additional constraints are also considered. In some cases the proofs give explicit constructions of plans. The results are illustrated by application to problems occurring in Operations Research.

1. Einleitung

Seien X und Y endliche Mengen, $Z \subset X \times Y$, $Z_x = \{y \mid (x,y) \in Z\}$ und $Z_y = \{x \mid (x,y) \in Z\}$.

$A \subset X$ (bzw. $B \subset Y$) nennt man *zuordenbar*, wenn eine Injektion $\rho : A \to Y$ mit $\rho(x) \in Z_x$ (bzw. $\psi : B \to X$ mit $\psi(y) \in Z_y$) existiert. Ist $A_0 \subset X$ mittels ρ_0 zuordenbar, so ist auch $\rho_0(A_0) = B_0 \subset Y$ zuordenbar, da zumindest die Injektion ψ_0 mit $\psi_0(\rho_0(x)) = x$ für $x \in A_0$ existiert.

Für $A \subset X$, $B \subset Y$ mit $\# A = \# B > 0$ heißt (A,B) ein *Zuordnungspaar*, wenn es eine Bijektion $f: A \to B$ mit $f(x) \in Z_x \cap B$ (bzw. $f^{-1}(y) \in Z_y \cap A$) gibt.

Bezeichne $\mathfrak{F}(A,B)$ die Menge dieser Bijektionen. $f \in \mathfrak{F}(A,B)$ heißt *Zuordnungsplan* für A und B.

[1]) Diese Arbeit ist mit Unterstützung des Sonderforschungsbereiches 72 an der Universität Bonn entstanden.

[2]) Dr. *W. Gaul*, Institut für Angewandte Mathematik und Informatik der Universität Bonn, Wegelerstraße 6.

[3]) Dr. *A. Heinecke*, Institut für Medizinische Informatik und Biomathematik der Universität Münster, Hüfferstraße 75.

Von Interesse sind natürlich Aussagen über zuordenbare Mengen bzw. Zuordnungspaare von maximaler Kardinalität, in geordneten Räumen über bzgl. der vorgegebenen Ordnung optimal zuordenbare Mengen bzw. optimale Zuordnungspaare der Kardinalität k, speziell für maximales k. Aussagen über optimal maximal zuordenbare Mengen in totalgeordneten Mengen als Folgerungen von Ergebnissen der Matroidtheorie enthält die Arbeit von *Gale* [1968].

Weiterhin ist man bestrebt, die Menge $\mathfrak{F}(A,B)$ zu charakterisieren. Man kann z. B. nach kostenminimalen Zuordnungsplänen $f \in \mathfrak{F}(A,B)$ suchen, falls man den Paaren $(x,y) \in A \times B$ Preise zuordnet [*Kuhn*, 1955], oder auch nach Zuordnungsplänen, in denen der Preis für das teuerste Paar (x,y) im Vergleich zu allen anderen Zuordnungsplänen gerade minimal ist [*Edmonds* und *Fulkerson*, 1970]. Einen Einblick in Problemstellungen der Zuordnungstheorie und die Berechnung zugehöriger Zuordnungspläne gibt z. B. das Buch von *Burkard* [1972]. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst die Frage nach der Existenz von optimal zuordenbaren Mengen und optimalen Zuordnungspaaren betrachtet, wenn man auf den Mengen X und Y Ordnungen vorgibt. Anschließend werden Nebenbedingungen eingeführt und ihre Auswirkungen auf die Existenz und Berechenbarkeit von zuordenbaren Mengen und Zuordnungspaaren bzw. Zuordnungsplänen in einigen Fällen diskutiert. Für die hierbei benutzten Aussagen und Methoden aus der Matroidtheorie sei auf *Edmonds* [1971] verwiesen. Die grundlegenden Begriffe der Matroidtheorie wurden erstmals von *Whitney* [1935] eingeführt. Zum Schluß wird eine konkrete dem Bereich der Wirtschaftswissenschaften entnommene Anwendungssituation beschrieben.

2. Optimale Zuordnung in geordneten Mengen

Für die Beschreibung eines Matroids existieren eine Reihe äquivalenter Formulierungen. Wir benutzen hier

Definition 1:

Sei M eine endliche Menge und $\mathfrak{M}$ eine Familie von Teilmengen von M. $(M,\mathfrak{M})$ heißt *Matroid*, wenn gilt

(1) $A \in \mathfrak{M}$ und $A' \subset A \Rightarrow A' \in \mathfrak{M}$,

(2) $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$ mit $\# A_1 = \# A_2 + 1 \Rightarrow \bigvee\limits_{a \in A_1 - A_2}$ mit $A_2 \cup \{a\} \in \mathfrak{M}$.

Sei jetzt M totalgeordnet mit der Ordnung „$\succ$", die sich folgendermaßen auf die Teilmengen von M überträgt:

Definition 2:

Für $M_1, M_2 \subset M$ heißt

(1) M_1 nicht schlechter als M_2 ($M_1 \succeq M_2$), wenn es eine Injektion $i: M_2 \to M_1$ mit $i(m) \succeq m$ für alle $m \in M_2$ gibt,

(2) M_1 besser als M_2 ($M_1 \succ M_2$), wenn $M_1 \succeq M_2$ und $i(m) \succ m$ für mindestens ein $m \in M_2$ gilt.

(3) $M_0^k \subset M$ (mit $\# M_0^k = k$) heißt optimale Menge der Kardinalität k, wenn es in der Menge $\{N | N \subset M, \# N \leq k\}$ kein besseres Element gibt.

Es kann jetzt natürlich unvergleichbare Teilmengen geben. Die Einschränkung auf die einelementigen Teilmengen liefert gerade wieder die ursprüngliche Ordnung.

Sei $k_0(\mathfrak{M})$ die maximale Kardinalitätszahl für die Teilmengen des Matroids $(M, \mathfrak{M})$.

Satz 1:

Sei M eine totalgeordnete Menge. Dann enthält jedes Matroid $(M, \mathfrak{M})$ ein eindeutig bestimmtes optimales Element der Kardinalität k für alle $k \leq k_0(\mathfrak{M})$.

Zum Beweis siehe für $k = k_0(\mathfrak{M})$ z.B. *Gale* [1968]. Die Aussage für $k < k_0(\mathfrak{M})$ folgt leicht aus Widerspruchsannahmen. Die explizite Angabe eines optimalen Elementes in einem durch eine totalgeordnete Menge erzeugten Matroid ist z.B. über den „Greedy-Algorithmus" möglich (siehe *Edmonds* [1971], *Welsh* [1968]).

Seien für die Mengen X und Y Totalordnungen vorgegeben, sei $Z \subset X \times Y$ und seien mit $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{Y}$ die Familien der zuordenbaren Mengen bezeichnet. Dann erhält man

Satz 2:

(i) $(X, \mathfrak{X})$ und $(Y, \mathfrak{Y})$ sind Matroide. Es gilt $k_0(\mathfrak{X}) = k_0(\mathfrak{Y}) =: k_0$.

(ii) Es gibt eindeutig bestimmte optimal zuordenbare Mengen $A_0^k \in \mathfrak{X}$ (bzw. $B_0^k \in \mathfrak{Y}$) der Kardinalität k für $k \leq k_0$.

Zum Beweis siehe z.B. *Gale* [1968], wo die Aussagen von Satz 2 für $(X, \mathfrak{X})$ und den Fall $k = k_0$ gezeigt werden.

Aus der Kenntnis des *Greedy*-Algorithmus folgt, daß $A_0^{k_1} \subset A_0^{k_2}$ (bzw. $B_0^{k_1} \subset B_0^{k_2}$) für $k_1 < k_2$ gilt. Es stellt sich nun die naheliegende Frage, ob (A_0^k, B_0^k) ein (optimales) Zuordnungspaar der Kardinalität k bildet. Diese Aussage ist für den Fall $k = k_0$ eine Folgerung aus einem Satz von *Ore* [1955], für die wir hier einen neuen konstruktiven Beweis vorstellen, der gleichzeitig die explizite Angabe eines Zuordnungsplanes für das optimale maximale Zuordnungspaar $(A_0^{k_0}, B_0^{k_0})$ ermöglicht.

Dabei definieren wir eine Ordnung auf der Menge der Zuordnungspaare wie folgt:

Definition 3:

Für zwei Zuordnungspaare (A_1, B_1), (A_2, B_2) heißt

(1) (A_1, B_1) nicht schlechter als (A_2, B_2), wenn $A_1 \geqq A_2$ und $B_1 \geqq B_2$ ist.

(2) (A_1, B_1) heißt besser als (A_2, B_2), wenn (A_1, B_1) nicht schlechter als (A_2, B_2) ist und wenigstens $A_1 \succ A_2$ oder $B_1 \succ B_2$ gilt.

Satz 3:

Seien X, Y totalgeordnete endliche Mengen, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ die Familien der über $Z \subset X \times Y$ zuordenbaren Mengen. Seien A_0 und B_0 die gemäß der oben eingeführten Ordnung eindeutig bestimmten optimalen Elemente der Kardinalität k_0 aus $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{Y}$.

Dann ist (A_0, B_0) ein Zuordnungspaar.

Beweis:

Nach Voraussetzung gibt es injektive Abbildungen

$$\rho_0 : A_0 \to Y \quad \text{mit} \quad \rho_0(A_0) = B_1 ,$$
$$\psi_0 : B_0 \to X \quad \text{mit} \quad \psi_0(B_0) = A_1 .$$

Für $B_1 = B_0$ oder $A_1 = A_0$ ist nichts zu beweisen. Sei also $A_0 \neq A_1$, $B_0 \neq B_1$. Wir setzen $\psi_0^{-1} = \rho_1$ und haben mit

$$\rho_0 : A_0 \to B_1 , \quad \rho_1 : A_1 \to B_0$$

zwei bijektive Abbildungen.

Um den Satz zu beweisen, müssen wir eine bijektive Abbildung

$$\rho : A_0 \to B_0$$

konstruieren mit $(x, \rho(x)) \in Z$.

Es gilt zunächst

$$\rho_0(A_0 - A_1) \subset B_0 \cap B_1 .$$

Andernfalls gäbe es

$$a \in A_0 - A_1 \quad \text{mit} \quad \rho_0(a) \in B_1 - B_0 ,$$

und

$$(A_1 \cup \{a\}, B_0 \cup \{\rho_0(a)\})$$

wäre ein Zuordnungspaar, im Widerspruch zur vorausgesetzten maximalen Kardinalität von A_1 und B_0.

Falls nun

$$\rho_0(A_0 - A_1) \cap \rho_1(A_0 \cap A_1) = \emptyset$$

gilt, so erhalten wir mit

$$\rho(a) = \begin{cases} \rho_0(a) & a \in A_0 - A_1 \\ \rho_1(a) & a \in A_0 \cap A_1 \end{cases}$$

unmittelbar die gewünschte Bijektion $\rho : A_0 \to B_0$.

Andernfalls gehen wir durch Austauschschritte von A_1 zu einer neuen Menge A_1' mit der Bijektion $\rho_1' : A_1' \to B_0$ über, die $\rho_0(A_0 - A_1') \cap \rho_1'(A_0 \cap A_1') = \emptyset$ erfüllt.

Die Austauschschritte lauten:

Sei $a^{(1)} \in A_0 \cap A_1$, $a \in A_0 - A_1$ mit $\rho_1(a^{(1)}) = \rho_0(a)$.

Setze $A_2 := A_1 - \{a^{(1)}\} \cup \{a\}$ und $\rho_2\colon A_2 \to B_0$ mit

$$\rho_2(x) = \begin{cases} \rho_1(x) & x \neq a \\ \rho_0(a) & x = a\,. \end{cases}$$

Ein solcher Schritt bewirkt die Vertauschung der Rollen von a und $a^{(1)}$ in dem Sinne, daß nunmehr gilt $a^{(1)} \in A_0 - A_2$ und $a \in A_0 \cap A_2$.

Wie oben überlegt man ferner, daß $\rho_0(a^{(1)}) \in B_0 \cap B_1$ gilt. Es gibt also ein $a^{(2)} \in A_2$ mit $\rho_2(a^{(2)}) = \rho_0(a^{(1)})$. Es ist $a^{(2)} \neq a$, denn $\rho_2(a) = \rho_0(a) \neq \rho_0(a^{(1)})$.

Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

a) falls $a^{(2)} \in A_2 - A_0$, so beende den Austauschschritt,

b) falls $a^{(2)} \in A_2 \cap A_0$, so bilden wir analog zu oben

$$A_3 := A_2 - \{a^{(2)}\} \cup \{a^{(1)}\}$$

und setzen $\rho_3\colon A_3 \to B_0$ mit

$$\rho_3(x) = \begin{cases} \rho_2(x)\,, & x \neq a^{(1)} \\ \rho_0(a^{(1)}), & x = a^{(1)}\,. \end{cases}$$

Da die $a^{(j)}$, die im Laufe der Austauschschritte betrachtet werden, alle verschieden sein müssen, tritt notwendig einmal der Fall a) ein, und das Verfahren endet. Tritt dies nach $(j-1)$ Schritten ein, so ist der Durchschnitt

$$\rho_0(A_0 - A_j) \cap \rho_j(A_0 \cap A_j)$$

gegenüber

$$\rho_0(A_0 - A_1) \cap \rho_1(A_0 \cap A_1)$$

um mindestens ein Element (nämlich $\rho_0(a^{(j-1)})$) reduziert. Dieses Verfahren fortgesetzt liefert schließlich das gewünschte A_1' mit

$$\rho_0(A_0 - A_1') \cap \rho_1'(A_0 \cap A_1') = \emptyset$$

und mit

$$\rho(a) = \begin{cases} \rho_0(a) & a \in A_0 - A_1' \\ \rho_1'(a) & a \in A_0 \cap A_1' \end{cases}$$

die gesuchte Bijektion. Q.E.D.

Wir haben hier gleichzeitig gezeigt, daß zwei maximal zuordenbare Mengen stets ein Zuordnungspaar bilden, denn die Optimalität der Mengen wurde beim Beweis gar nicht benötigt.

Für optimal zuordenbare Mengen der Kardinalität k mit $k < k_0$, braucht (A_0^k, B_0^k) kein Zuordnungspaar zu sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 1:

Sei $X = \{1,2\}$, $Y = \{1,2\}$, $Z = \{(1,2), (2,1)\}$.

Ferner sei sowohl auf X als auch auf Y die Ordnung $1 \succ 2$ gegeben. Hier ist in der Bezeichnung von Satz 2

$$A_0^{ko} = A_0^2 = \{1,2\}, \quad A_0^1 = \{1\},$$
$$B_0^{ko} = B_0^2 = \{1,2\}, \quad B_0^1 = \{1\}.$$

(A_0^1, B_0^1) ist aber kein Zuordnungspaar.

3. Zuordnung unter Nebenbedingungen

In den Anwendungen ist es oft notwendig, bei Zuordnungen Nebenbedingungen zu berücksichtigen. Wir behandeln mehrere Fälle, dabei seien X und Y immer totalgeordnet:

B1) Gelte $S \subset X$, $T \subset Y$.

Gesucht wird ein Zuordnungspaar (A,B) mit $S \subset A$, $T \subset B$.

Es gilt der

Satz 4:

(i) B1 ist lösbar $\Leftrightarrow S \in \mathfrak{X}$, $T \in \mathfrak{Y}$.

(ii) Ist B1 lösbar, so enthält $\{(A,B) \mid A \supset S,\ B \supset T, (A,B) \text{Zuordnungspaar}\}$ ein eindeutig bestimmtes optimales Element.

Beweis:

(i) Die Notwendigkeit ist unmittelbar klar, denn wenn S und T nicht selbst zuordenbar sind, können sie auch nicht in zuordenbaren Mengen enthalten sein, die ein Zuordnungspaar bilden. Da umgekehrt jede zuordenbare Menge aber in einer maximal zuordenbaren Menge enthalten ist, dies seien für S und T etwa S_0 und T_0, haben wir, wie aus der Bemerkung nach Satz 3 folgt, mit (S_0, T_0) das gewünschte Zuordnungspaar gefunden.

(ii) Sei $\mathfrak{S} = \{A \in \mathfrak{X} \mid A \supset S\}$, $\quad \mathfrak{X}_S = \{A - S \mid A \in \mathfrak{S}\}$,

$\mathfrak{T} = \{B \in \mathfrak{Y} \mid B \supset T\}$, $\quad \mathfrak{Y}_T = \{B - T \mid B \in \mathfrak{T}\}$.

Dann ergibt eine Überprüfung der Bedingungen von Definition 1:
$(X - S, \mathfrak{X}_S)$ (bzw. $(Y - T, \mathfrak{Y}_T)$) ist ein Matroid.

Die eindeutig bestimmten Elemente $W_0 \in \mathfrak{X}_S$ und $V_0 \in \mathfrak{Y}_T$ liefern maximal zuordenbare Mengen $W_0 \cup S \in \mathfrak{X}$ und $V_0 \cup T \in \mathfrak{Y}$, die nach Satz 3 aufeinander zuordenbar sind. Damit existiert also ein eindeutig bestimmtes optimales Zuordnungspaar $(W_0 \cup S, V_0 \cup T)$. Q.E.D.

Vollständigkeitshalber betrachten wir auch die folgende Beschränkung B2, durch die man Unverträglichkeiten in den Teilmengen von X und Y charakterisieren kann. Dabei sei für $P \subset X$ mit $\bar{P} = X - P$ das Komplement von P in X bezeichnet.

B2) Gelte $P \subset X$, $R \subset Y$.

Gesucht wird ein Zuordnungspaar (A,B) mit $\# (A \cap P) < \# P$, falls $P \neq \emptyset$, $\# (B \cap R) < \# R$, falls $R \neq \emptyset$.

Man überprüft leicht, daß B2 genau dann lösbar ist, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

(i) $k_0 > 2$,
(ii) $k_0 = 2$ und $\# P \neq \# R$ oder $\# R = \# P \geq 2$,
(iii) $k_0 = 2$, $\# P = \# R = 1 \Rightarrow \bar{P} \times \bar{R} \cap Z \neq \emptyset$,
(iv) $k_0 = 1 \notin \{\# P, \# R\}$,
(v) $k_0 = 1 \in \{\# P, \# R\} \Rightarrow \{P\} \neq \mathfrak{X}$ und/oder $\{R\} \neq \mathfrak{Y}$, je nachdem, ob $\# P = \# R$ oder nur $\# P = 1$ oder $\# R = 1$ gilt.

Optimal zuordenbare Mengen bzw. optimale Zuordnungspaare brauchen jetzt nicht mehr zu existieren. Man erhält dann lediglich eine optimale Klasse nicht vergleichbarer Elemente. Elemente dieser Klasse ergeben sich, wenn man bei P und/oder R das schlechteste Element streicht.

Im folgenden fragen wir danach, unter welchen Bedingungen die k-Abschnitte $A_0^k = \{x_1,\ldots,x_k\}$, $B_0^k = \{y_1,\ldots,y_k\}$ der optimal zuordenbaren Mengen $A_0 = \{x_1,\ldots,x_{k_0}\}$ mit $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_{k_0}$ und $B_0 = \{y_1,\ldots,y_{k_0}\}$ mit $y_1 \succ y_2 \succ \cdots \succ y_{k_0}$, die man nach Satz 3 aufeinander zuordnen kann, ein Zuordnungspaar bilden.

Zunächst gilt der unmittelbar aus der bekannten *Hall*schen Bedingung – vgl. etwa *Ryser* [1963] – folgende

Satz 5:

Sei (A_0,B_0) das optimale Zuordnungspaar der Kardinalität k_0. Notwendig und hinreichend dafür, daß für $k < k_0$ auch die k-Abschnitte A_0^k und B_0^k ein Zuordnungspaar bilden, ist das Erfülltsein der *Hall*schen Bedingung:

$$\text{(H)} \bigwedge_{j \leq k} \bigwedge_{\{i_1,\ldots,i_j\} \subset \{1,\ldots,k\}} \left| \bigcup_{\nu=1}^{j} (Z_{x_{i_\nu}} \cap B_0^k) \right| \geq j .$$

Beweis:

(H) ist gerade notwendig und hinreichend dafür, daß die Mengenfamilie $\{Z_{x_\nu} \cap B_0^k \mid \nu = 1,\ldots,k\}$ ein vollständiges System verschiedener Repräsentanten besitzt. Sei y_{i_ν} der Repräsentant von $Z_{x_\nu} \cap B_0^k$. Offenbar bilden dann die Mengen A_0^k und B_0^k vermöge der Bijektion $\rho: A_0^k \to B_0^k$ mit $\rho(x_\nu) = y_{i_\nu}$ ein Zuordnungspaar.

Q.E.D.

Die *Hall*sche Bedingung (H) ist für die Praxis sehr unhandlich. Wir geben daher folgende einfacher zu verifizierende Bedingung:

B3) $(\mathfrak{F}(A_0^k, B_0^k) \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{F}(A_0^{k+1}, B_0^{k+1}) \neq \emptyset) \Leftrightarrow$
Es gilt entweder $(x_{k+1}, y_{k+1}) \in Z$ oder es gibt $i < k+1$, $j < k+1$ und $\rho_k \in \mathfrak{F}(A_0^k, B_0^k)$ mit $(x_i, y_j) = (x_i, \rho_k(x_i)) \in Z$ und $(x_i, y_{k+1}) \in Z$, $(x_{k+1}, y_j) \in Z$.

Man kann B3 schrittweise für $k \leq k_0 - 2$ nachprüfen, doch kann auch hier entsprechend der Kardinalität der Mengen $\mathfrak{F}(A_0^k, B_0^k)$ der Rechenaufwand umfangreich werden. Einfach zu überprüfende, allerdings nur hinreichende Bedingungen sind

B4) $x_1 \succ x_2$ und $y \in Z_{x_2} \Rightarrow y \in Z_{x_1}$,
B5) $x_1 \succ x_2$, $y_1 \succ y_2$ und $y_2 \in Z_{x_1}$, $y_1 \in Z_{x_2} \Rightarrow y_1 \in Z_{x_1}$.

Es gilt B4 $\Rightarrow$ B5.
Damit erhält man

Satz 6:
Sei (A_0, B_0) optimales Zuordnungspaar der Kardinalität k_0 und $\rho \in \mathfrak{F}(A_0, B_0)$. Es gelte B4. Dann folgt:

$$\bigwedge_{k \leq k_0} (A_0^k, B_0^k) \text{ ist Zuordnungspaar.}$$

Den Beweis wollen wir nicht ausführlich angeben, da Satz 6 wegen B4 $\Rightarrow$ B5 lediglich einen Spezialfall des nächsten Satzes beschreibt. Man überlege sich aber, daß wegen

$$(A_0, B_0) \text{ ist Zuordnungspaar} \Rightarrow (A^k, B_0^k) \text{ ist Zuordnungspaar}$$

mit $\rho^{-1}(B_0^k) = A^k = \{x_{v_1}, \ldots, x_{v_k}\} \subset A_0$ und $x_{v_1} \succ x_{v_2} \succ \cdots \succ x_{v_k}$
und $x_{v_i} \leqq x_i \Rightarrow y_i = \rho(x_{v_i}) \in Z_{x_i}$
schon alles folgt.

Satz 7:
Sei (A_0, B_0) optimales Zuordnungspaar der Kardinalität k_0 und $\rho \in \mathfrak{F}(A_0, B_0)$. Es gelte B5. Dann folgt:

$$\bigwedge_{k \leq k_0} (A_0^k, B_0^k) \text{ ist Zuordnungspaar.}$$

Beweis:
Wir müssen eine Bijektion $\rho_k: A_0^k \to B_0^k$ konstruieren. Dazu greifen wir auf die nach Voraussetzung existierende Bijektion $\rho: A_0 \to B_0$ zurück und zerlegen A_0^k auf folgende Weise in zwei disjunkte Mengen A_1^k und A_2^k:

$$A_1^k := \{x \in A_0^k \mid \rho(x) \in B_0^k\},$$
$$A_2^k := \{x \in A_0^k \mid \rho(x) \in B_0 - B_0^k\}.$$

Für $x \in A_1^k$ setzen wir

$$\rho_k(x) = \rho(x).$$

Für $x \in A_2^k$ gilt wegen B5

$$Z_x \supset B_0^k - \rho(A_1^k).$$

Denn sei $y \in B_0^k - \rho(A_1^k)$, dann gibt es ein $x' \in A_0 - A_0^k$ mit $\rho(x') = y$. Das bedeutet aber, die Voraussetzungen von B5 sind erfüllt, denn

$$x \succ x', \qquad \rho(x) \in Z_x,$$

$$y \succ \rho(x), \qquad y \in Z_{x'}.$$

Daher schließen wir $y \in Z_x$.
Mithin ist jedes $x \in A_2^k$ jedem $y \in B_0^k - \rho(A_1^k)$ zuordenbar. Q.E.D.

4. Anwendungen und Beispiele

Die verwendeten Begriffe und Aussagen sollen an einem Beispiel erläutert werden.

Sei X eine Menge von Arbeitern, Y eine Menge von Jobs, und $Z \subset X \times Y$ gebe an, welcher Arbeiter welche Jobs ausführen kann. Eine zuordenbare Teilmenge von X bzw. von Y nennen wir ein Team, bzw. ein Projekt. Die Ordnungen auf X und Y seien nach betriebswirtschaftlichen Gesichtspunkten vorgegeben. Ohne das im einzelnen festzulegen, soll man also von einem Arbeiter entscheiden können, ob er besser, bzw. von einem Job, ob er wichtiger als ein anderer ist. Nach unseren allgemeinen Überlegungen setzen wir die Ordnungen auf die Teams bzw. Projekte fort.

Satz 3 besagt dann, daß unter den gemachten Voraussetzungen jedes maximale Team jedes maximale Projekt und insbesondere das beste Team das wichtigste Projekt durchführen kann.

Beispiel 2:
Sei $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{1,2,3,4\}$, wobei wir uns die Arbeiter und Jobs in absteigender Rangfolge durchnumeriert denken. Z sei durch die 0-1-Matrix A beschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a_{ik} = \begin{cases} 1 & (i,k) \in Z \\ 0 & (i,k) \notin Z. \end{cases}$$

Die Rechnung nach dem *Greedy*-Algorithmus liefert in den Bezeichnungen von Satz 2

$$\begin{aligned} A_0^1 &= \{1\}, & B_0^1 &= \{1\}, \\ A_0^2 &= \{1,2\}, & B_0^2 &= \{1,2\}, \\ A_0^3 &= \{1,2,3\}, & B_0^3 &= \{1,2,3\}, \\ A_0^4 &= \{1,2,3,5\}, & B_0^4 &= \{1,2,3,4\}. \end{aligned}$$

A_0^4, B_0^4 können unabhängig voneinander berechnet werden. Man erkennt, daß mehrere Bijektionen $\rho: A_0^4 \to B_0^4$ möglich sind. In diesem Fall kann man die Entscheidung, welche Zuordnung zu wählen ist, nach der ungarischen Methode [*Kuhn*, 1955] treffen. Hierzu geht man von A zu einer Kostenmatrix $C = (c_{ik})_{\substack{i \in A_0^{k_0} \\ k \in B_0^{k_0}}}$ über, wo c_{ik} die Kosten angibt, die bei Erledigung des Jobs k durch den Arbeiter i entstehen. Ist $a_{ik} = 0$, so setzt man zweckmäßig $c_{ik} = \infty$. Es ist zu beachten, daß bei der Durchführung des Algorithmus nur die Elemente aus $A_0^{k_0} \times B_0^{k_0}$ berücksichtigt werden müssen. Für die praktische Rechnung ist das ein Vorteil.

Übersteigen die Kosten für eine optimale Zuordnung des besten Teams auf das wichtigste Projekt die zur Verfügung stehenden finanziellen Mittel, so ist man gezwungen, nach einer Zuordnung der k-Abschnitte zu suchen. B4 und B5 sind hinreichende Bedingungen dafür, daß sich für jedes $k \leq k_0$ eine Zuordnung $A_0^k \leftrightarrow B_0^k$ angeben läßt. Diese Bedingungen besagen anschaulich: ein besserer Arbeiter soll alle Jobs können, die auch ein weniger guter kann, bzw. falls ein besserer Arbeiter weniger wichtige Jobs als ein schlechterer Arbeiter beherrscht, so soll er, da er ja als besser qualifiziert wurde, auch die wichtigeren Jobs, die der schlechtere kann, beherrschen.

Im Beispiel 2 erkennt man, daß eine abschnittsweise Zuordnung nicht möglich ist. Deswegen müssen beide Bedingungen verletzt sein.

Beispiel 3:

Betrachtet man die Mengen $X = \{1,2\}$, $Y = \{1,2,3,4\}$, wobei die Elemente wieder in absteigender Rangfolge durchnumeriert sein sollen, und die Z beschreibende 0-1-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so erhält man

$$\begin{aligned} A_0^1 &= \{1\}, \qquad & B_0^1 &= \{1\}, \\ A_0^2 &= \{1,2\}, \qquad & B_0^2 &= \{1,2\} \end{aligned}$$

und als weitere maximal zuordenbare Mengen von Y $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, wobei $\{1,4\}$ und $\{2,3\}$ nicht vergleichbar sind. Gilt in der Bedingung B2 $R = \{1,2\}$, so gibt es unter den jetzt noch möglichen Projekten kein wichtigstes mehr. Außerdem erkennt man, daß hier eine abschnittsweise Zuordnung möglich ist, obwohl sowohl B4 als auch B5 verletzt sind.

Herrn Professor Dr. *R. E. Burkard* sind die Autoren für die Durchsicht des Manuskriptes und wertvolle Änderungsvorschläge zu Dank verpflichtet.

Literaturverzeichnis

Burkard, R. E.: Methoden der Ganzzahligen Optimierung, Wien-New York 1972.
Edmonds, J.: Matroids and the Greedy Algorithm, in: Math. Prog. **1**, 127–136, 1971.
Edmonds, J., and *D. R. Fulkerson:* Bottleneck Extrema, in: J. Comb. Theory **8**, 299–306, 1970.
Gale, D.: Optimal Assignment in an Ordered Set: An Application of Matroid Theory, in: J. Comb. Theory **4**, 176–180, 1968.
Kuhn, H. W.: The Hungarian Method for Solving the Assignment Problem, in: Naval Res. Logist. Quart. **2**, 83–97, 1955.
Ore, O.: Graphs and Matching Theorems, in: Duke Math. J. **22**, 625–639, 1955.
Ryser, H. J.: Combinatorial Mathematics, in: The Carus Mathematical Monographs **14**, 1963.
Welsh, D. J. A.: *Kruskal*'s Theorem for Matroids, in: Proc. Camb. Phil. Soc. **64**, 3–4, 1968.
Whitney, H.: On the Abstract Properties of Linear Dependence, in: Amer. J. Math. **57**, 509–533, 1935.