

Probleme bei gleichzeitigen Flüssen in Graphen

Wolfgang Gaul, Bonn

Zusammenfassung: Es wird für den allgemeinen Fall der Betrachtung von gleichzeitigen Flüssen verschiedener Beschaffenheit in Graphen ein Lösungsansatz diskutiert, der zeigt, wie man die bisher behandelten Nebenbedingungstypen zusammenfassen kann. Im Spezialfall wird für die Hu'sche Methode zur Berechnung zweier gleichzeitiger Flüsse eine Verbesserungsmöglichkeit beschrieben, die Rechenaufwand und Anzahl der Verfahrensschritte verringern kann. Vergleiche mit einem eigenen Verfahren werden angegeben. Auf die Verwendbarkeit der Ergebnisse für Kapazitätsstrukturänderungen des zugrundeliegenden Graphen wird hingewiesen.

1. Einleitung

Problemstellungen unter Berücksichtigung gleichzeitiger Flüsse verschiedener Beschaffenheit (engl.: multicommodity flows) finden ein wachsendes Interesse, wie die (keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebende) im Literaturverzeichnis gelistete Zusammenstellung einiger Arbeiten zeigt. Eine Vielzahl von Arbeiten läßt sich dabei durch einen gemeinsamen Lösungsansatz beschreiben, dessen grundlegende Überlegungen schon früh von Ford/Fulkerson [6] formuliert wurden. Neben diesen Autoren sei insbesondere auch auf die Arbeiten von Hu [15], [16] verwiesen, der als erster den Spezialfall zweier gleichzeitiger Flüsse in antisymmetrischen Netzen mit zum Nullpunkt symmetrischen Kapazitätsintervallen behandelt hat. Für die Hu'sche Methode zur Berechnung zweier gleichzeitiger Flüsse verschiedener Beschaffenheit wird in dieser Arbeit eine Verbesserungsmöglichkeit angegeben, die den Rechenaufwand verringert und auch die Anzahl der Verfahrensschritte reduzieren kann, wie an einem Beispiel verdeutlicht wird. Auf andere Lösungsansätze, Vergleiche mit bekannten Lösungsmöglichkeiten sowie ihre Verwend-

barkeit für Aussagen über Kapazitätsstrukturänderungen des zugrundeliegenden Graphen unter Berücksichtigung der genannten Nebenbedingungstypen wird hingewiesen.

2. Problemformulierung

Beschreibe $G(P,K)$ einen endlichen, gerichteten, schlichten Graphen, wobei P die Punkte und $K \subset P \times P \setminus \bigcup_{i \in P} \{(i,i)\}$ die Kantenmenge des Graphen bezeichnet. Ist $G(P,K)$ (schwach) zusammenhängend, spricht man auch von einem Netzwerk. Bei der Kapazitätszuordnung für die Kanten von $G(P,K)$ ist allgemein $c^1, c^2 \in \mathbb{R}^{|K|}$ mit $c^1 \leq c^2$ vorgegeben. Für diese Arbeit gelte speziell

$$c^1 = 0, \quad c^2 = c \geq 0 \quad (1)$$

oder

$$-c^1 = c^2 = c \geq 0 \quad (2)$$

und zur Abkürzung seien symmetrische, vollständige Kapazitätsnetze, für die (1) gilt, mit $[P,K,c]$, antisymmetrische, vollständige Kapazitätsnetze, für die (2) gilt, mit (P,K,c) bezeichnet (Nichtexistierende Kanten kann man durch $c_{ij} = 0$ für $i, j \in P$ berücksichtigen.).

Für die Darstellung gleichzeitiger Flüsse verschiedener Beschaffenheit hat man mehrere Möglichkeiten:

$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \end{pmatrix}$ mit $x^d \in \mathbb{R}^{|K|}$ ($d=1, \dots, k$) beschreibt k gleichzeitige Flüsse in Punkt-Kante-Form, falls

$$\sum x^d = v^d, \quad [v^d]_i = \begin{cases} v(x^d) & i=n_d \\ 0 & i \neq n_d, \hat{n}_d \\ -v(x^d) & i=\hat{n}_d \end{cases} \quad \begin{matrix} n_d, \hat{n}_d \in P, \\ n_d \neq \hat{n}_d, \\ d = 1, \dots, k \end{matrix} \quad (3)$$

und (je nachdem, welcher Netzwerktyp zugrundeliegt)

für $[P,K,c]$

$$\sum_{d=1}^k x^d \leq c, \quad x^d \geq 0 \quad (4)$$

für (P,K,c)

$$\sum_{d=1}^k |x^d| \leq c \quad (4')$$

gilt. Die ausgezeichneten Punkte $n_d, \hat{n}_d \in P$ heißen Quelle, Senke, $v(x^d)$ Wert des d -ten Flusses x^d . $v(x) := \sum v(x^d)$ heißt Wert von x . \mathcal{I} ist die Punkt-Kante Inzidenzmatrix von $[P, K, c]$ bzw. (P, K, c) .

Sei $\mathcal{W}^d = \{w_1^d, \dots, w_{n(d)}^d\}$ die Menge der Wege (Pfade) von n_d nach \hat{n}_d .

$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \end{pmatrix}$ mit $x^d = (\dots, x_i^d, \dots)^T \in \mathbb{R}_+^{n(d)}$ ($d=1, \dots, k$) beschreibt k gleichzeitige Flüsse in Kante-Weg (Pfad)-Form, falls

$$\sum_{i=1}^{n(d)} x_i^d = v(x^d) \quad d = 1, \dots, k \quad (5)$$

und (je nachdem, welcher Netzwerktyp zugrundeliegt) für $[P, K, c]$

$$\sum_{d=1}^k \sum_{i=1}^{n(d)} a_{id}^{\mu\nu} x_i^d \leq c_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad a_{id}^{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & (\mu, \nu) \in K(w_i^d) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

für (P, K, c)

$$\sum_{d=1}^k \sum_{i=1}^{n(d)} |a_{id}^{\mu\nu} x_i^d| \leq c_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad a_{id}^{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & (\mu, \nu) \in V(w_i^d) \\ -1, & (\mu, \nu) \in R(w_i^d) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (6')$$

gilt. $K(w_i^d) = V(w_i^d) \cup R(w_i^d)$ sei die Kantenmenge des Pfades w_i^d , unterteilt in die Mengen der bzgl. der Durchlaufungsrichtung vorwärts- bzw. rückwärts-gerichteten Kanten (Für Wege w_i^d gilt $R(w_i^d) = \emptyset$).

Mit $\mathcal{A}^d = (a_{id}^{\mu\nu})$ heißt $\mathcal{A} = (\dots, \mathcal{A}^d, \dots)$ Kante-Weg (Pfad) Inzidenzmatrix für $[P, K, c]$ bzw. (P, K, c) . Von Nachteil ist, daß sich wegen der Vielzahl der möglichen Wege (Pfade) eine explizite Angabe von \mathcal{A} nur für Probleme sehr kleiner Dimension als zweckmäßig erweist.

1) Zur Vereinfachung wurde die Bezeichnungsweise nicht geändert, eine Verwechslung ist nicht zu befürchten.

Die Äquivalenz zwischen den Darstellungen in Punkt-Kante- und Kante-Weg (Pfad)-Form folgt leicht aus Überlegungen, auf die schon in Ford/Fulkerson [7] hingewiesen wird. Man siehe aber auch Jarvis [18].

Von Bedeutung sind noch spezielle Kantenteilmengen des zugrundeliegenden Graphen. $((n_1, \dots, n_k), (\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k)) \subset K$ heißt trennende Kantenmenge bzgl. $n_d, \hat{n}_d \in P$ ($d=1, \dots, k$), falls sie minimal ist mit der Eigenschaft: In $G(P, K \setminus ((n_1, \dots, n_k), (\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k)))$ sind n_d und \hat{n}_d ($d=1, \dots, k$) nicht zusammenhängend.

$$c((n_1, \dots, n_k), (\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k)) := \sum_{(i,j) \in ((n_1, \dots, n_k), (\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k))} c_{ij}$$

ist der Wert von $((n_1, \dots, n_k), (\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k))$.

Bezeichnet $F_{\langle P, K, c \rangle}^{n_1, \dots, n_k; \hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k}$ die Menge der k gleichzeitigen Flüsse, $S_{\langle P, K, c \rangle}^{n_1, \dots, n_k; \hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k}$ die Menge der trennenden Kantenmengen, wobei für die eckigen Klammern der entsprechende Graphentyp zu wählen ist, so gilt natürlich

$$\max_{F_{\langle P, K, c \rangle}^{n_1, \dots, n_k; \hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k}} v(x) \leq \min_{S_{\langle P, K, c \rangle}^{n_1, \dots, n_k; \hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k}} c((n_1, \dots, n_k), (\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k)) \quad (7)$$

Für $k = 1$ zeigt die bekannte Aussage von Ford/Fulkerson [7] die Gleichheit für (7), allgemein kann echte Ungleichheit auftreten.

3. Lösungsansätze mittels Spaltengeneration

Im Fall $k > 2$ ist in der Literatur eine Bevorzugung der Darstellung der Probleme unter Berücksichtigung gleichzeitiger Flüsse in Kante-Weg-Form für $[P, K, c]$ festzustellen. Eine Vielzahl solcher Lösungsansätze läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Sei $n = \sum_{d=1}^k n(d)$ und $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, betrachte

$$\begin{aligned} & \min F(x, y) \\ (GF) \quad & A^h x + B^h y + C^h s = t^h \quad h = 1, \dots, r \\ & x \geq 0, \text{ entspr. Annahmen für } y. \end{aligned}$$

Bezeichnet I die (entsprechend dimensionierte) Einheitsmatrix, e den (jeweils entsprechend dimensionierten) Vektor aus lauter Einsen, so erhält man aus der Formulierung (GF) den Lösungsansatz von (α) Ford/Fulkerson [6] zur Berechnung von gleichzeitigen Flüssen mit maximalem Wert (siehe auch Hu [16]), wenn man

$$F(x,y) = -y, \quad y \in \mathbb{R}_+$$

für $h = 1$: $A^1 = \mathcal{O}$, $B^1 = 0$, $C^1 = I$, $t^1 = c$

für $h = 2$: $A^2 = e^T$, $B^2 = -1$, $C^2 = 0^T$, $t^2 = 0$

setzt,

(β) Tomlin [32] zur Berechnung gleichzeitiger kostenminimaler Flüsse (siehe auch Hu [16]), wenn man

$$F(x,y) = p^T x$$

für $h = 1$: entsprechend wie in (α)

für $h = 2$:

$$\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \quad A^h = (0^T, \dots, 0^T, \underset{\uparrow}{e^T}, 0^T, \dots, 0^T), \quad B^h = 0^T, \quad C^h = -1,$$

$$\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} \quad \begin{matrix} (h-1)\text{-te Stelle} \\ t^h = b^{h-1} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(Schranke für} \\ v(x^{h-1})) \end{matrix}$$

für $h=k+1$:

und/oder

für $h=k+2$: $A^{k+2} = e^T$, $B^{k+2} = 0^T$, $C^{k+2} = -1$, $t^{k+2} = \bar{v}$ (Schranke für $v(x)$)

setzt.

Dabei bestimmt $p = (\dots, \sum_{(\mu, \nu) \in K} a_{id}^{\mu\nu} p_{\mu\nu}, \dots)$ die Kosten der

Wege w_i^d , $p_{\mu\nu}$ die Kosten für $(\mu, \nu) \in K$. Gleichzeitige Flüsse mit den Nebenbedingungen $h = 2, \dots, k+1$ bzw. $h = k+2$ nennt man (b^1, \dots, b^k) -zulässig bzw. \bar{v} -zulässig.

(γ) Cremeans/Smith/Tyndall [4], Wollmer [33], Swoveland [30] u.a. zur Berechnung gleichzeitiger Flüsse unter Ressourcenbeschränkungen (Spezialfall: Kapazitätsbeschränkungen), wenn man

für $h = 1$ bis $h = k+2$: entsprechend wie in (β)

für $h = k+2+\delta$: $A^{k+2+\delta} = (\sum_{(\mu, \nu) \in K} r_{\mu\nu}^{\delta d} a_{id}^{\mu\nu}), \quad B^{k+2+\delta} = 0,$

$c^{k+2+\delta} = I, t^{k+2+\delta} = r^\delta$ (Ressourcen-
 räte), $\delta = 1, \dots, \kappa$

wählt. Dabei bestimmt $R^\delta = (r_{\mu\nu}^{\delta d})$ den Verbrauch der Resource δ durch den Fluß x^d in der Kante $(\mu, \nu) \in K$. Kostenmodifikationen z.B. der Art $P_i^d = \sum_{(\mu, \nu) \in K} (p_{\mu\nu} + \sum_{\delta=1}^{\kappa} p^\delta r_{\mu\nu}^{\delta d}) a_{id}^{\mu\nu}$ sind durchzuführen, die zusätzliche Kosten p^δ für die Resource δ berücksichtigen. Ein Wechsel von Ressourcen beim Transport der gleichzeitigen Flüsse, auf den in [4] hingewiesen wird, kann durch Berechnung kürzester Wege mit Kantenübergangskosten (siehe Gaul [10]) berücksichtigt werden.

(δ) Gaul [8], wo auf Existenzüberlegungen für gleichzeitige Flüsse mittels optimaler Änderung der Struktur des zugrundeliegenden Graphen eingegangen wird. Betrachtet man speziell Kapazitätserweiterungen (entsprechendes gilt für Ressourcenänderungen), so kann man

$$F(x, y) = \tilde{p}^T y, \quad y \in \mathbb{R}_+^{|K|}$$

für $h = 1$: $A^1 = \Omega, B^1 = -I, C^1 = I, t^1 = c$

für $h = 2$ bis $h = k+1$ und/oder $h = k+2$: entsprechend wie in (β)

setzen. Dabei beschreibt \tilde{p} die Kosten der Erweiterung. Für $\tilde{p} > 0$ sichert $y = 0$ die Existenz z -zulässiger ($z = (b^1, \dots, b^k)$ oder $z = \bar{v}$) gleichzeitiger Flüsse.

(ϵ) Klessing [21], Golden [12] u.a., wenn man

$F(x, y)$ stetig differenzierbar

(speziell F konvex [21], F quadratisch, keine Kapazitäts- und Ressourcenbeschränkungen [12]) wählt. Es werden Gradientenverfahren benutzt, wobei man bemüht ist, durch Zusatzvoraussetzungen an die Gestalt von F für die Folge der entstehenden linearen Teilprobleme Bedingungen zu schaffen, die die Anwendung der Spaltengeneration (nach Ford/Fulkerson [6]) gestatten. Die Spaltengeneration wird in allen Fällen (α) bis (ϵ) bevorzugt eingesetzt, da sie die Schwierigkeit der expliziten Kenntnis von Ω berücksichtigt, indem sie über die Simplexmultiplikatorbewertungen für die Kanten des zugrundeliegenden Graphens bereitstellt, die als "Längen"

der Kanten interpretiert werden können. In jedem Iterationsschritt ist dann eine zum Basistausch in der (revidierten) Simplexmethode benötigte Spalte von \mathcal{U} über einen Algorithmus zur Berechnung kürzester Wege zu bestimmen. ²⁾

4. Ergebnisse beim Hu'schen Spezialfall

Der Fall $k = 2$ gestattet für Graphen vom Typ (P, K, c) eine rein netzwerktheoretische Behandlung. Zwei gleichzeitige Flüsse seien abkürzend als Doppelfluß bezeichnet. Es wird die Darstellung in Punkt-Kante Form (siehe (3), (4')) benutzt. Hu [15] hat als erster gezeigt, daß unter diesen Bedingungen für (7) Gleichheit gilt. Ist $\mathcal{F}(P, K, c)_{z}^{n_1, n_2; \hat{n}_1, \hat{n}_2}$ die Menge der ganzzahligen z-zulässigen Doppelflüsse ($z = (b^1, b^2)$ oder $z = \bar{v}$ (siehe Abschnitt 3(β))), so enthalten Hu [15], Rothschild/Whinston [27], [28] und Sakarovitch [29] Aussagen für die Existenzbedingung $\mathcal{F}(P, K, c)_{z}^{n_1, n_2; \hat{n}_1, \hat{n}_2} \neq \emptyset$.

4.1. Verbesserung der Hu'schen Methode ³⁾

In (P, K, c) ($c_{ij} \in \mathbb{Z}^+$, $c_{ij} \equiv 0 \pmod{2}$ für $(i, j) \in K$ sichert die Endlichkeit des Verfahrens) führt man zur Berechnung der Probleme

$$(a) \text{ Suche } \max \{ \bar{v} \mid \mathcal{F}(P, K, c)_{\bar{v}}^{n_1, n_2; \hat{n}_1, \hat{n}_2} \neq \emptyset \}$$

$$(b) \text{ Gilt } \mathcal{F}(P, K, c)_{(b^1, b^2)}^{n_1, n_2; \hat{n}_1, \hat{n}_2} \neq \emptyset ?$$

Flußwerterhöhungen mit dem Ford/Fulkerson-Algorithmus durch

$$I) \text{ bzgl. } x^1 \text{ in } (P, K, c) \text{ bis } v(x^1) \text{ oder } \tilde{v}(x^1) = \max_{f \in \mathcal{F}(P, K, c)} v(f)_{n_1; \hat{n}_1}$$

²⁾ Man siehe aber auch Grigoriadis/White [13], Hartman/Lasdon [14], wo andere Ansätze für die Lösung der (linearen) Problemstellung vorgeschlagen werden, die möglicherweise (vor allem bei Problemen kleinerer Dimension) mit der Spaltengeneration konkurrieren können. Vergleichende Ergebnisse existieren jedoch nicht.

³⁾ Die von der Hu'schen Arbeit abweichende Darstellung des Graphen durch (P, K, c) hat vor allem rechentechnische Vorteile, z.B. reduziert sie die Anzahl der Variablen x_{ij}^d auf die Hälfte.

erreicht ist (Für $\tilde{v}(x^1) < b^1$ ist (β) nicht lösbar.),

II) bzgl. x^2 in $(P, K, c - |x^1|)$ bis $\tilde{v}(x^2) = \max_{f \in \mathcal{F}(P, K, c - |x^1|)} v(f)$ $n_2; \hat{n}_2$
erreicht ist.

III) Suche nach flußverstärkendem Zyklus $(v(x^2))$ wird vergrößert) mittels Markierung von Punkt Mengen P_R, P_V durch

$$\begin{aligned} n_2 \in P_R, \quad i \in P_R, \quad (i, j) \in K \text{ und } x_{ij}^1 + x_{ij}^2 < c_{ij} &\Rightarrow j \in P_R \\ i \in P_R, \quad (j, i) \in K \text{ und } x_{ji}^1 + x_{ji}^2 > -c_{ji} &\Rightarrow j \in P_R \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} n_2 \in P_V, \quad i \in P_V, \quad (i, j) \in K \text{ und } -x_{ij}^1 + x_{ij}^2 < c_{ij} &\Rightarrow j \in P_V \\ i \in P_V, \quad (j, i) \in K \text{ und } -x_{ji}^1 + x_{ji}^2 > -c_{ji} &\Rightarrow j \in P_V \end{aligned} \quad (9)$$

Gilt $\hat{n}_2 \in P_R$ (oder $\hat{n}_2 \in P_V$), existiert ein Pfad w_R (oder w_V) von n_2 nach \hat{n}_2 . Gesucht sind über solche Pfade bildbare R-V-Zyklen, die eine Flußänderung gestatten. Mit

$$x_R^1 = \min \{ \min \{ x_{ji}^1 > 0 \mid (j, i) \in R(w_R) \}, \min \{ -x_{ij}^1 \mid x_{ij}^1 < 0, (i, j) \in V(w_R) \} \}$$

$$x_V^1 = \min \{ \min \{ x_{ij}^1 > 0 \mid (i, j) \in V(w_V) \}, \min \{ -x_{ji}^1 \mid x_{ji}^1 < 0, (j, i) \in R(w_V) \} \}$$

$$c_R = \min \{ \min \{ c_{ij} - x_{ij}^1 - x_{ij}^2 \mid (i, j) \in V(w_R) \}, \min \{ c_{ji} + x_{ji}^1 + x_{ji}^2 \mid (j, i) \in R(w_R) \} \}$$

$$c_V = \min \{ \min \{ c_{ij} + x_{ij}^1 - x_{ij}^2 \mid (i, j) \in V(w_V) \}, \min \{ c_{ji} - x_{ji}^1 + x_{ji}^2 \mid (j, i) \in R(w_V) \} \}$$

wird als Schranke für die Flußänderung bei H_u

$$h = \min \{ x_V^1, x_R^1, \frac{1}{2}c_V, \frac{1}{2}c_R \}$$

gewählt. Die R-V-Flußänderung geschieht folgendermaßen:
Vergrößerung von x^1 entlang w_R um h Einheiten, Verkleinerung von x^1 entlang w_V um h Einheiten. Vergrößerung von x^2 entlang w_R und w_V jeweils um h Einheiten. Existieren keine R-V-Zyklen mehr, ist für das Problem 4.1.(a) ein maximaler Doppelfluß mit Wert $v(x^1, x^2) = \tilde{v}(x^1) + \tilde{v}(x^2)$ bestimmt. Gilt $v(x^1) = b^1$ und immer

noch $\forall(x^2) < b^2$, ist das Problem 4.1.(β) nicht lösbar.

Es gilt:

Es genügt, $h = \frac{1}{2} \min \{c_R, c_V\}$ zu fordern.

Beweis:

Durch die h-Operation wird (x^1, x^2) in $(x^1(h), x^2(h))$ überführt. Durch R-V-Flußänderungen wird die Eigenschaft (3) nicht beeinflusst (jedoch $v(x^1(h)) = v(x^1)$, $v(x^2(h)) = v(x^2) + 2h$ erreicht). Es bleibt (4') nachzuweisen. Für $(i, j) \in K$ muß man also, falls (i, j) Element von 1. $V(w_R) \cap R(w_V)$, 2. $V(w_R) \cap V(w_V)$, 3. $R(w_R) \cap R(w_V)$, 4. $R(w_R) \cap V(w_V)$, 5. $R(w_R) \setminus K(w_V)$, 6. $V(w_R) \setminus K(w_V)$, 7. $R(w_V) \setminus K(w_R)$, 8. $V(w_V) \setminus K(w_R)$ ist, die Bedingung $|x_{ij}^1(h)| + |x_{ij}^2(h)| \leq c_{ij}$ prüfen. Es wird lediglich 1. und 5. gezeigt, in den übrigen Fällen verfährt man entsprechend.

1. Wegen (8), (9) ist

$$h \leq \frac{1}{2} \min \{c_{ij} - x_{ij}^1 - x_{ij}^2, c_{ij} - x_{ij}^1 + x_{ij}^2\} \quad (10)$$

deshalb folgt

a) $x_{ij}^1 \geq -2h \Rightarrow |x_{ij}^1 + 2h| + |x_{ij}^2| = x_{ij}^1 + x_{ij}^1 + 2h \leq c_{ij}$

wobei, je nachdem, ob $x_{ij}^2 \geq 0$ oder $x_{ij}^2 < 0$ gilt, in (10) der entsprechend kleinere Wert zu wählen ist.

b) $x_{ij}^1 < -2h \Rightarrow |x_{ij}^1 + 2h| + |x_{ij}^2| = |x_{ij}^1| + |x_{ij}^2| - 2h < c_{ij}$

5. Wegen (8) gilt

$$h \leq \frac{1}{2} (c_{ij} + x_{ij}^1 + x_{ij}^2)$$

deshalb folgt

a) $x_{ij}^1 \geq h, x_{ij}^2 \geq h \Rightarrow |x_{ij}^1 - h| + |x_{ij}^2 - h| = x_{ij}^1 + x_{ij}^2 - 2h < c_{ij}$

b) $x_{ij}^1 \geq h, x_{ij}^2 < h \Rightarrow |x_{ij}^1 - h| + |x_{ij}^2 - h| = x_{ij}^1 - x_{ij}^2 \leq |x_{ij}^1| + |x_{ij}^2| \leq c_{ij}$

- c) $x_{ij}^1 < h, x_{ij}^2 \geq h \Rightarrow |x_{ij}^1 - h| + |x_{ij}^2 - h| = -x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leq$
 $\leq |x_{ij}^1| + |x_{ij}^2| \leq c_{ij}$
- d) $x_{ij}^1 < h, x_{ij}^2 < h \Rightarrow$
 $= -x_{ij}^1 - x_{ij}^2 + 2h \leq c_{ij}$

4.2. Beispiel

Das folgende Beispiel zeigt, daß durch die vereinfachte Wahl von h nicht nur der Rechenaufwand vermindert wird, sondern auch eine Reduktion der Anzahl der Verfahrensschritte erreicht werden kann.

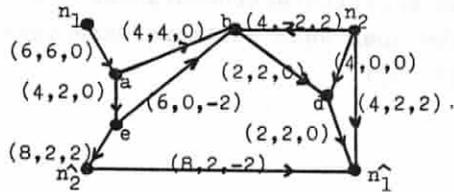
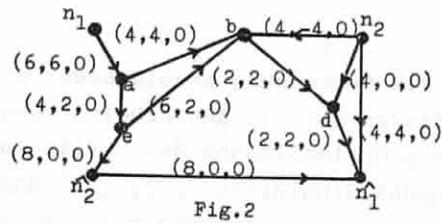
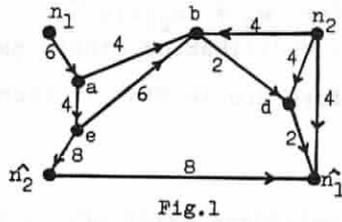


Fig. 3

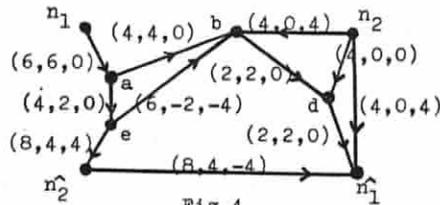


Fig. 4

Fig. 1 zeigt einen Graphen vom Typ (P,K,c) , wobei die den Kanten zugeordneten Werte die Kapazitäten beschreiben. Kanten (i,j) mit $c_{ij} = 0$ sind weggelassen worden. Fig. 2 zeigt einen nach dem

Ford/Fulkerson-Algorithmus erhaltenen maximalen Fluß x^1 mit $v(x^1) = 6$, gleichzeitig gilt

$$\max_{f \in \mathcal{F}(P, K, c - |x^1|)} v(f) \quad n_2; \hat{n}_2 = 0$$

(Die den Kanten zugeordneten Tripel beschreiben die Kapazitäten und die Werte des 1. und 2. Flusses). Ein Pfad $w_R = \{n_2, b, e, \hat{n}_2\}$ und ein Pfad $w_V = \{n_2, \hat{n}_1, \hat{n}_2\}$ sind markierbar. Nach Hu wäre $h = 2$ wegen

$$x_R^1 = \min \{-x_{n_2 b}^1, x_{eb}^1\} = \min \{4, 2\} = 2,$$

$$x_V^1 = x_{n_2 \hat{n}_1}^1 = 4, \quad c_R = 8, \quad c_V = 8$$

mit dem in Fig. 3 gezeigten Flußwechsel. Eine weitere R-V-Zyklus-Bestimmung wäre notwendig, z.B. wieder $w_R = \{n_2, b, e, \hat{n}_2\}$, $w_V = \{n_2, \hat{n}_1, \hat{n}_2\}$. Mit der angegebenen Modifikation erhält man wegen $h = \frac{1}{2} \min \{c_R, c_V\} = 4$ hingegen sofort die in Fig. 4 beschriebene Endsituation.

Für die Berechnung z-zulässiger Doppelflüsse existieren Lösungsverfahren auch in den Arbeiten von Gaul [9] (dort wird eine andere Optimallösung des vorliegenden Beispiels angegeben), Rothschild/Whinston [27], [28] und Sakarovitch [29]. Ihre Verwendung bei Lösungsansätzen für Kapazitätsstrukturänderungen behandeln Gaul [8], [11] (man siehe aber auch Bellmore/Greenberg/Jarvis [1], Bellmore/Ratliff [2]).

6. Literatur

- [1] Bellmore, M., H.J. Greenberg and J.J. Jarvis: Multicommodity Disconnecting Sets. *Manag.Sc.* 16 (1970) B-427-B-433.
- [2] Bellmore, M. and H.D. Ratliff: Optimal Defense of Multicommodity Networks. *Manag.Sc.* 18 (1971) B-174-B-185.
- [3] Bellmore, M. and R.R. Vemuganti: On Multicommodity Maximal Dynamic Flows. *J.ORSA* 21 (1973) 10-21.
- [4] Cremeans, J.E., R.A. Smith and G.R. Tyndall: Optimal Multicommodity Network Flows with Resource Allocation. *NRLQ* 17 (1970) 269-279.
- [5] Ferland, J.A.: Minimum Cost Multicommodity Circulation Problem with Convex Arc-Costs. *Transp.Sc.* 8 (1974) 355-360.
- [6] Ford, L.R. and D.R. Fulkerson: A Suggested Computation for Maximal Multicommodity Network Flows. *Manag.Sc.* 5 (1959) 97-101.
- [7] Ford, L.R. and D.R. Fulkerson: *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton, N.Y. (1962).
- [8] Gaul, W.: R-Satisfying Multi-Commodity Flows and Capacity-Alterations of Networks. *Math.Balk.* 4 (1974) 219-224.
- [9] Gaul, W.: Zur Berechnung gleichzeitiger Flüsse verschiedener Beschaffenheit. *Proceedings in Operations Research* 5 (1975) 113-118.
- [10] Gaul, W.: Über Flußprobleme in Netzwerken. *ZAMM* 56 (1976) T 340- T342.
- [11] Gaul, W.: Increasing the Capacity of a Multi-Commodity Network. working paper.
- [12] Golden, B.L.: A Minimum-Cost Multicommodity Network Flow Problem Concerning Imports and Exports. *Networks* 5 (1975) 331-356.
- [13] Grigoriadis, M.D. and W.W. White: A Partitioning Algorithm for the Multicommodity Network Flow Problem. *Math.Progr.* 3 (1972) 157-177.
- [14] Hartman, J.K. and L.S. Lasdon: A Generalized Upper Bounding Algorithm for Multicommodity Network Flow Problems. *Networks* 1 (1971) 333-354.
- [15] Hu, T.C.: Multi-Commodity Network Flows. *J.ORSA* 11 (1963) 344-360.
- [16] Hu, T.C.: *Integer Programming and Network Flows*. Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).
- [17] Iri, M.: On an Extension of the Maximum-Flow Minimum-Cut Theorem to Multicommodity Flows. *J.Op.Res.Soc.Japan* 13 (1971) 129-135.
- [18] Jarvis, J.J.: On the Equivalence between the Node-Arc and Arc-Chain Formulations for the Multi-Commodity Maximal Flow Problem. *NRLQ* 16 (1969) 525-529.
- [19] Kaut, E.: A Multicommodity Flow Problem. *Networks* 4 (1974) 267-280.
- [20] Kleitman, D.J.: An Algorithm for Certain Multi-Commodity Flow Problems. *Networks* 1 (1971) 75-90.
- [21] Klessig, R.W.: An Algorithm for Nonlinear Multicommodity Flow Problems. *Networks* 4 (1974) 343-355.
- [22] Korsak, A.: An Algorithm for Globally-Optimal Nonlinear-Cost Multidimensional Flows in Networks and some Special Applications. *J.ORSA* 21 (1973) 225-239.

- [23] Markland, R.E.: Analyzing Multi-Commodity Distribution Networks Having Milling-in-Transit Features. *Manag. Sc.* 21 (1975) 1405-1416.
- [24] Panagiotakopoulos, D.: Multi-Commodity Multi-Transformed Network Flows with an Application to Residuals Management. *Manag. Sc.* 22 (1976) 874-882.
- [25] Rao, M.R.: A Column Generation Scheme for the Deterministic Multi-Commodity Warehousing Model with Cash-Liquidity Constraints. *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle* 13 (1971) 203-221.
- [26] Rothfarb, B. and I.T. Frisch: Common Terminal Multicommodity Flow with a Concave Objective Function. *SIAM J. Appl. Math.* 18 (1970) 489-502.
- [27] Rothschild, B. and A. Whinston: On Two Commodity Network Flows. *J. ORSA* 14 (1966) 377-387.
- [28] Rothschild, B. and A. Whinston: Feasibility of Two Commodity Network Flows. *J. ORSA* 14 (1966) 1121-1129.
- [29] Sakarovitch, M.: Two Commodity Flows and Linear Programming. *Math. Progr.* 4 (1973) 1-20.
- [30] Swoveland, C.: A Two-Stage Decomposition Algorithm for a Generalized Multi-Commodity Flow Problem. *INFOR* 11 (1973) 232-244.
- [31] Tapiro, C.S. and M.A. Soliman: Multi-Commodities Transportation Schedules over Time. *Network* 2 (1972) 311-327.
- [32] Tomlin, J.A.: Minimum-Cost Multicommodity Network Flows. *J. ORSA* 14 (1966) 45-51.
- [33] Wollmer, R.D.: Multicommodity Networks with Resource Constraints: The Generalized Multicommodity Flow Problem. *Networks* 1 (1971) 245-263.

Anschrift:
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Wegelerstr. 6
D-5300 Bonn