Sonderdruck aus Sonderheft

GAMM-Tagung Göttingen 1975

Band 56 **1976**

Wolfgang Gaul

Über Flußprobleme in Netzwerken

Es werden Problemstellungen betrachtet, die bei der Behandlung gleichzeitiger Flüsse verschiedener Beschaffenheit in Netzwerken mit unterschiedlicher Transportstruktur entstehen. Dabei werden Nebenbedingungen berücksichtigt, die Beschränkungen der Transportkapazitäten und damit der Flußwerte beschreiben. Es werden Lösungsmöglichkeiten diskutiert, die einen Rückgriff auf bekannte netzwerktheoretische Methoden gestatten.

Sei (N, A, φ) ein endlicher gerichteter Graph, wobei $N = \{1, \dots, n\}$ die Knotenpunktmenge, A die Kanten und $\varphi: A \to N \times N$ die Zuordnung der Kanten zu den durch sie verbundenen Knotenpaaren beschreibt $(a \to \varphi(a) = (i, j),\ i, j \in N)$. Sei (N, A, φ) darstellbar als Vereinigung von endlichen, gerichteten schlichten Graphen (N^l, A^l, φ^l) mit $N^l = N$ für $l = 1, \dots, e$ (wegen der Schlichtheit ist hier die Zuordnung $\varphi^l(a) \leftrightarrow (i, j)^l$ sogar eineindeutig). Fig. 1 zeigt einen Graphen der beschriebenen Form für $e = 3$. In (N, A, φ) bezeichnet dann $(i_1, i_2)^{l_1}, (i_2, i_3)^{l_2}, \dots, (i_r, i_{r+1})^{l_r}$, $i_m \in N$, $m = 1, \dots, r+1$, einen Weg von i_1 nach i_{r+1}. Bekanntlich heißt ein Weg *einfach* bzw. *elementar*, wenn keine Kanten bzw. keine Punkte mehrmals durchlaufen werden. Im Gegensatz zum „kürzesten Weg Problem“ (ohne Nebenbedingungen), dessen Lösungen elementar sind, muß für die hier betrachtete Situation die größere Klasse der einfachen Wege berücksichtigt werden, da ein Übergang von $(\alpha, \beta)^{l_i}$ nach $(\beta, \gamma)^{l_j}$ größere Kosten verursachen kann als ein Umweg $(\alpha, \beta)^{l_i}, (\beta, \delta)^{l_1}, (\delta, \tau)^{l_2}, (\tau, \beta)^{l_3}, (\beta, \gamma)^{l_j}$ (siehe Fig. 2).

Für ausgewählte Punktepaare $n_q, \hat{n}_q \in N$, $n_q \neq \hat{n}_q$, $q = 1, \dots, k$, kann man nach den k gleichzeitigen Flüssen verschiedener Beschaffenheit fragen, die n_q bzw. $\hat{n}_q$ als Quelle bzw. Senke (für den q-ten Fluß) haben. Dazu betrachte man die Menge der einfachen Wege w^q_ϱ, $\varrho = 1, \dots, n(q)$, von jeweils n_q nach $\hat{n}_q$, $q = 1, \dots, k$. Sei $x^q = (\dots, x^q_\varrho, \dots) \in R^{n(q)}_+$ und x^q_ϱ der Wert des q-ten Flusses im ϱ-ten Weg. Mit der Kante-Weg-Inzidenzmatrix W^q mit den Koeffizienten $w^q_{(i,j)l,\varrho} = 1$, falls $(i, j)^l \in w^q_\varrho$, $= 0$, sonst, und der den Übergang zwischen den Graphen (N^l, A^l, φ^l) beschreibenden Matrix $U^q = (U^{l_1 l_2}_q)$, wobei die Koeffizienten der Untermatrix $U^{l_1 l_2}_q$ die Gestalt $u^q_{(i,j)l_1(j,r)\,l_2,\varrho} = 1$, falls $(i, j)^{l_1}, (j, r)^{l_2} \in w^q_\varrho$, $= 0$, sonst, haben, kann man in (N, A, φ) die k gleichzeitigen Flüsse $x = (x^{1\prime}, \dots, x^{k\prime})' \geqq 0$ mit $W = (W^1, \dots, W^k)$, $U = (U^1, \dots, U^k)$ darstellen durch

$$Wx \leqq c\,, \tag{1}$$

$$Ux \leqq b\,, \tag{2}$$

wobei $c: A \to R_+$ die Kapazität der Kanten, $b: B \to R_+$, $B \subset A \times A$, Übergangsbeschränkungen in den Punkten beim Wechsel der Kanten beschreibt. Gilt für $(s^1, \dots, s^k)' \in R^k_+$ (bzw. $\bar{s} \in R_+$) $e_q' x^q \geqq s^q$, $q = 1, \dots, k$ (bzw. $\sum_{q=1}^{k} e_q' x^q \geqq \bar{s}$), $e_q = (1, \dots, 1)' \in R^{n(q)}$, so nennt man x zusätzlich $(s^1, \dots, s^k)$-*zulässig* (bzw. $\bar{s}$-*zulässig*). $s^q, \bar{s}$ beschreibt den durch die Flüsse zu befriedigenden Mindestbedarf.

Weiter kann der Einsatz von Hilfsmitteln zum Transport der Flüsse berücksichtigt werden. Beschreiben die Koeffizienten $h^{qm}_{(i,j)}l$ bzw. $h^{qm}_{(i,j)}l_{1(j,r)}l_2$ der Matrizen H^q_1 bzw. H^q_2 den Verbrauch des m-ten Hilfsmittels, $m = 1, \dots, f$, zum Transport in bzw. Übergang zwischen den Kanten für eine Einheit des q-ten Flusses, so erhält man

$$\sum_{q=1}^{k} H^q_1 W^q x^q \leqq h^1\,, \qquad \sum_{q=1}^{k} H^q_2 U^q x^q \leqq h^2\,, \tag{3}$$

wobei h^1, h^2 den Vorrat an Hilfsgütern angeben. Es ergeben sich die Problemstellungen:

I.) Existenz von $(s^1, \dots, s^k)$- bzw. $\bar{s}$-zulässigen gleichzeitigen Flüssen unter den Nebenbedingungen (1), (2), (3).

II.) Angabe optimaler Lösungen, falls Kosten $p^q_{(i,j)}l$ für den Transport in und $p^q_{(i,j)}l_{1(j,r)}l_2$ für den Übergang zwischen den Kanten, sowie für den Verbrauch von Hilfsmitteln $(d^{qm}_{(i,j)}l,\ d^{qm}_{(i,j)}l_{1(j,r)}l_2)$ gegeben sind.

III.) Optimale Änderung der Transportbedingungen (z. B. falls I.) nicht gilt).

Für III.) wird man die Graphen (N^l, A^l, φ^l) als vollständig und symmetrisch voraussetzen und Kosten für die Änderung (Erhöhung, Verbesserung) von Kapazitäten, Übergangsbedingungen, Hilfsmitteln vorgeben, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll (siehe aber [6]). Alle Probleme lassen sich durch den Ansatz lösen, der im folgenden auf ein Problem der Art II.) (womit automatisch auch Existenzfragen beantwortet werden) angewandt wird. Man hat z. B. $\min\limits_{\mathfrak{R}} p'x$ mit

$$\mathfrak{R} = \left\{x \geqq 0 \mid Wx \leqq c,\ Ux \leqq b,\ \sum_{q=1}^{k} H^q_1 W^q x^q \leqq h^1,\ \sum_{q=1}^{k} H^q_2 U^q x^q \leqq h^2,\ e_q' x^q \geqq s^q,\ q = 1, \dots, k\right\},$$

wobei mit $a^1a^2 = (i, j)^{l_1}(j, r)^{l_2} \in B$ gilt

$$p^q_\varrho = \sum_A w^q_{a\varrho}\left(p^q_a + \sum_{m=1}^{f} d^{qm}_a h^{qm}_a\right) + \sum_B u^q_{a^1a^2\varrho}\left(p^q_{a^1a^2} + \sum_{m=1}^{f} d^{qm}_{a^1a^2} h^{qm}_{a^1a^2}\right).$$

Besonders störend bei einem solchen „großen“ linearen Programm ist, daß man zur expliziten Angabe die Vielzahl der einfachen Wege kennen müßte. Dekompositionsüberlegungen, die zuerst in [4], später auch in [2], [9], [11], [12] verwendet wurden und die die für einen Austauschschritt in der (revidierten) Simplexmethode benötigte Spalte durch netzwerktheoretische Verfahren mittels Berechnung von kürzesten Wegen bestimmen (siehe aber auch [5], [7]) können mit entsprechenden Modifikationen auch für die beschriebene Situation benutzt werden.

Durch Zuordnung der Werte $\pi \in R^{\# A}$, $\lambda \in R^{\# B}$, $\mu, \nu \in R^m$, $\sigma \in R^k$ zu den Ungleichungssystemen von $\mathfrak{R}$ ergibt sich, daß, falls gilt

$$p^q_\varrho - \sum_A w^q_{a\varrho}\left(\pi_a + \sum_{m=1}^{f} h^{qm}_a \mu_m\right) - \sum_B u^q_{a^1a^2\varrho}\left(\lambda_{a^1a^2} + \sum_{m=1}^{f} h^{qm}_{a^1a^2}\nu_m\right) - \sigma^q < 0\,,$$

die dem ϱ-ten Weg für den q-ten Fluß zugeordnete Spalte zur Pivotisierung benutzt werden kann. Eine solche Spalte kann über ein Verfahren, beschrieben in [1] und [8], berechnet werden, das kürzeste Wege unter Berücksichtigung von Übergangskosten liefert. Als Lösungen können auch einfache Wege auftreten. Man benötigt entweder ein dem ursprünglichen Netz zugeordnetes Pseudonetz ([1]), in dem man kürzeste Wege ohne Nebenbedingungen sucht, oder man ordnet Kantenpaaren a^1a^2 der Form $a^1 = (\alpha, \beta)^{l_1}, (\beta, \gamma)^{l_2} = a^2$ Werte

$$t(a^1, a^2) = p_a^q - \pi_{a^1} + \sum_m h_{a^1}^{qm}(d_{a^1}^{qm} - \mu_m) + p_{a^1a^2}^q - \lambda_{a^1a^2} + \sum_m h_{a^1a^2}^{qm}(d_{a^1a^2}^{qm} - \nu_m)$$

zu, wobei (damit keine negativen Zykel auftreten können) auf $\pi_{a^1} \leqq 0$, $\lambda_{a^1a^2} \leqq 0$, $\mu_m, \nu_m \leqq 0$ und $\sigma^q \geqq 0$ zu achten ist (andernfalls Wahl des zur zugehörigen Slack-Variable gehörenden Vektors in die Basis).

Durchführung des Verfahrens bedeutet dann, einen der bekannten Algorithmen für kürzeste Wege ohne Nebenbedingungen auf die Kanten (statt Punkte) anzuwenden. Gilt $\min \sum_{a^1a^2 \in w_\varrho^q} t(a^1, a^2) \geqq \sigma^q$, ist das Optimum erreicht, andernfalls müssen bei jedem Iterationsschritt maximal k kürzeste Weg-Verfahren vom Typ [8] durchgerechnet werden. Gilt $e = 1$ (es fallen dann die die Übergangsbeschränkungen beschreibenden Ungleichungen weg) und berücksichtigt man keine Hilfsmittelbedingungen, erhält man die in [11] beschriebene Problemstellung.

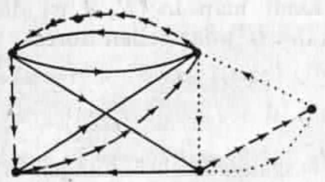

Bild 1

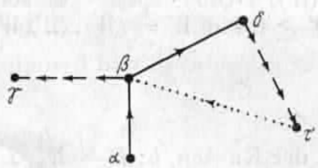

Bild 2

Literatur

1 CALDWELL, T., On finding minimum routes in a network with turn penalties, Comm. ACM 4, 107–108 (1961).
2 CREMEANS, J. E., SMITH, R. A. and TYNDALL, G. R., Optimal multicommodity network flows with resource allocation, Naval Res. Logist. Quartely 17, 269–279 (1970).
3 DREYFUS, S. E., An appraisal of some shortest-path algorithms, J. ORSA 17, 395–412 (1969).
4 FORD, L. R., and FULKERSON, D. R., A suggested computation for maximal multicommodity network flows, Management Sci. 5, 97–101 (1959).
5 GRIGORIADIS, M. D., and WHITE, W. W., A partitioning algorithm for the multicommodity network flow problem, Math. Programming 3, 157–177 (1972).
6 GAUL, W., r-satisfying multicommodity flows and capacity-alterations of networks, Math. Balkanica 4, 219–224 (1974).
7 HARTMAN, J. K., and LASDON, L. S., A generalized upper bounding algorithm for multicommodity network flow problems, Network 1, 333–354 (1972).
8 KIRBY, R. F., and POTTS, R. B., The minimum route problem for networks with turn penalties and prohibitions, Transpn. Res. 3, 397–408 (1969).
9 SWOVELAND, C., A two-stage decomposition algorithm for a generalized multi-commodity flow problem, INFOR 11, 232 – 244 (1973).
10 SWOVELAND, C., A note on column generation in DANTZIG-WOLFE decomposition algorithms, Math. Programming 5, 365 – 370 (1974).
11 TOMLIN, J. A., Minimum-cost multicommodity network flows, J. ORSA 14, 45–51 (1966).
12 WOLLMER, R. D., Multicommodity networks with resource constraints: The generalized multicommodity flow problem, Networks 1, 245–263 (1972).

Anschrift: WOLFGANG GAUL, Institut für Angewandte Mathematik und Informatik der Universität Bonn, D-53 Bonn, Wegelerstraße 6, BRD