Sonderdruck aus Sonderheft

GAMM-Tagung Graz 1976

Band 57 1977

ZAMM 57, T 323 – T 325 (1977)

W. Gaul

Zur Lösung von Wegproblemen mit zeitabhängigen Beschränkungen

Sei $G(P, K, l)$ ein *endlicher, gerichteter, schlichter Graph,* wobei P die Punkte, $K \subset P \times P - \bigcup \{(i, i) \mid i \in P\}$ die Kanten und l für jede Kante $(i, j) \in K$ von der Benutzungszeit t abhängige Kantenlängen $l_{ij}(t)$ beschreibt. Zur Vereinfachung wird $l_{ij}(t)$ nicht negativ und ganzzahlig und $t \in \mathfrak{T} = \{0, 1, \dots, T\}$ vorausgesetzt. Man betrachtet *Wege von a nach q, a* fest, $a, q \in P$, die sich beschreiben lassen durch

$$w(a, q) = (P_{w(a,q)}, A_{w(a,q)}, D_{w(a,q)}) ,$$

wobei

$$P_{w(a,q)} = (a = p_0, p_1, \dots, p_m = q) , \qquad p_i \in P , \qquad i \in I_{w(a,q)} = \{0, 1, \dots, m\} ,$$

die Folge der Punkte angibt, die dabei (in dieser Anordnung) durchlaufen werden (natürlich muß dann eine Kantenfolge

$$K_{w(a,q)} = \big((p_0, p_1), \dots, (p_{m-1}, p_m)\big) \quad \text{mit} \quad (p_i, p_{i+1}) \in K\,, \qquad i \in I_{w(a,q)} - \{m\}\,,$$

existieren). Für die bzgl. dieses Weges realisierten *Ankunfts-* und *Abfahrtszeiten* $A_{w(a,q)} = (A(p_0), \dots, A(p_m))$, $D_{w(a,q)} = (D(p_0), \dots, D(p_{m-1}))$, $D(p_i) \in \mathfrak{T}$, $i \in I_{w(a,q)} - \{m\}$, muß gelten

$$D(p_i) \geqq A(p_i)\,, \qquad i \in I_{w(a,q)} - \{m\}\,, \tag{1}$$

$$A(p_m) \leqq T\,, \qquad A(p_0) = 0\,, \tag{2}$$

$$A(p_i) = D(p_{i-1}) + l_{p_{i-1}p_i}\big(D(p_{i-1})\big)\,, \qquad i \in I_{w(a,q)} - \{0\}\,. \tag{3}$$

Die Differenz $D(p_i) - A(p_i)$ beschreibt die *Wartezeit* in p_i.

Wenn für gewisse Punkte $p \in P$ Zeitintervalle definiert sind, in denen *Warteverbote* bestehen, z. B. in der Gestalt $V_p = \bigcup\, [t^p_{1k}, t^p_{2k}]$, t^p_{1k}, t^p_{2k} ganzzahlig und so gewählt, daß $\bigcap\, [t^p_{1k}, t^p_{2k}] = \emptyset$, $k = 1, \dots, n(p)$, hat man zusätzlich zu beachten

$$\left.\begin{aligned} &A(p) \in V_p \Rightarrow D(p) = A(p)\,, \\ &t^p_{2k} < A(p) < t^p_{1(k+1)} \Rightarrow D(p) \leqq t^p_{1(k+1)}\,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

(Intervalle z. B. der Form $[t^p_{1k}, t^p_{2k})$ kann man durch $[t^p_{1k}, t^p_{2k} - 1]$ berücksichtigen).

Existiert keine Verbindung von i nach j, $i, j \in P$, zum Zeitpunkt t, sei $l_{ij}(t) = M > T$ gesetzt. Die *Länge von* $w(a, q)$ ist gegeben durch

$$l(w(a, q)) = \sum_{I_{w(a,q)} - \{m\}} l_{p_ip_{i+1}}(D(p_i)) + D(p_i) - A(p_i)\,.$$

$w(a, a)$ heißt *positiver, negativer* oder *Null-Zyklus*, wenn $l(w(a, a))$ positiv, negativ oder gleich Null ist (negative Zyklen können wegen der speziellen Wahl von l nicht auftreten). $w(a, q)$ heißt *einfach* bzw. *elementar* (zykelfrei), wenn $K_{w(a,q)}$ bzw. $P_{w(a,q)}$ nur aus verschiedenen Elementen besteht. Wegen $l(w(a, q) = A(p_m)$ sind nur durch T beschränkte Wege von Interesse. Für $q = b$ sei W_T die Menge dieser Wege von a nach b. Gesucht wird ein zeitoptimaler Weg $w_{\text{opt}}(a, b)$ in W_T. Da die Handhabung der Größen eines einen Weg definierenden Tupels mitunter umständlich ist, betrachtet man das Problem

$$\max B(b)$$

unter den Nebenbedingungen

$$B(a) = 0\,, \tag{5}$$

$$B(j) \leqq \min_{(q,j) \in K} \min_{t \in T_q} \{l_{qj}(t) + t\}\,, \qquad j \in P - \{a\}\,, \tag{6}$$

mit

$$T_q = \{t \in \mathfrak{T} \mid \exists w(a, q) \text{ mit } l(w(a, q)) = \tau \leqq t \quad \text{und} \quad [\tau, t) \cap V_q = \emptyset\}\,,$$

dessen durch (5) und (6) bestimmte Lösungsmenge $\mathfrak{B}$ (wegen $B \equiv 0 \in \mathfrak{B}$) nicht leer ist. Mit (3) und (6) gilt

$$\min_{W_T} l(w(a, b)) = \min_{W_T} A(b) \geqq \max_{\mathfrak{B}} B(b)\,. \tag{7}$$

Wegen (7) liefert deshalb der im folgenden beschriebene Algorithmus zur Bestimmung einer Optimallösung $B_0 \in \mathfrak{B}$ die für das Wegproblem benötigte Information.

Seien α_i bzw. β_i die Mengen der durch den Algorithmus berechneten Ankunfts- bzw. Abfahrtszeiten für Wege, die $i \in P$ berühren, sei $P_0 \subset P$ die Menge der Punkte, für die früheste Ankunftszeiten bekannt sind, gelte $I_i(P_0) = 0$, falls $i \in P_0$, $= 1$, sonst.

Algorithmus

Schritt 0:

$$P^1_0 = \{a\}\,, \qquad (B^1(i) = 0, \alpha^1_i = \emptyset, i \in P)\,, \qquad (\beta^1_i = \emptyset, i \in P - \{a\})\,;$$

$$\beta^1_a = \{[0, t^a_{11}] \cap \mathfrak{T}\}, \gamma = \beta^1_a, (m^1(i, t) = \emptyset, i \in P, t \in \mathfrak{T})\,, \qquad s = a\,, \qquad h = 1\,.$$

Schritt h:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_i = \{\tau \mid \tau = l_{si}(t) + t, t \in \gamma\}\,, \\ &m^h(i, \tau) = m^h(i, \tau) \cup \{\langle s, t\rangle\}, \tau \in \delta_i, t \in \gamma\,, \\ &\alpha^h_i = \alpha^h_i \cup \delta_i - \beta^h_i\,, \end{aligned}\right\} i \in P - \{s\}\,;$$

$$\varepsilon^h = \min_{i \in P} \min_t \{t \in \alpha^h_i\} - \max_{j \in P} B^h(j) \rightarrow i(h) \in P\,;$$

$$B^{h+1}(j) = B^h(j) + I_j(P^h_0) \cdot \varepsilon^h\,, \qquad \max_{j \in P} B^{h+1}(j) > T\,? \rightarrow \text{STOP}.$$

$$P^{h+1}_0 = P^h_0 \cup \{i(h)\}\,, \qquad i(h) = b\,? \rightarrow \text{STOP}\,.$$

$$\Gamma = \{t \in \mathfrak{T} \mid t \in \bigcup_{\text{disjunkt}} [\tau, \Theta], \tau \in \alpha^h_{i(h)}, \Theta \text{ maximal mit } [\tau, \Theta) \cap V_{i(h)} = \emptyset\}\,,$$

$$m^{h+1}(i, t) = \begin{cases} \bigcup_{\varkappa \leqq t} m^h(i, \varkappa) & \varkappa, t \in [\tau, \Theta] \text{ def. über } \Gamma, \quad i = i(h) \\ m^h(i, t) & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\gamma = \Gamma - \beta^h_{i(h)}; \qquad \beta_i^{h+1} = \begin{cases} \beta_i^h \cup \Gamma & i = i(h) \\ \beta_i^h & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\alpha_i^{h+1} = \alpha_i^h, \qquad s = i(h), \qquad h = h + 1, \qquad \text{wiederhole Schritt } h.$$

Man überlegt sich leicht, daß

$$\min_{j \in \overline{P_0^h}} \min_{(q,j) \in K} \min_{t \in T_q} \{l_{qj}(t) + t\} \geqq \min_{i \in P} \min_{t} \{t \in \alpha_i^h\} \tag{8}$$

gilt, andernfalls gäbe es $j_0 \in \overline{P_0^h}$ und $w(a, j_0)$ mit

$$l(w(a, j_0)) = \min_{j \in \overline{P_0^h}} \min_{(q,j) \in K} \min_{t \in T_q} \{l_{qj}(t) + t\} = t_0 < \min_{i \in P} \min_{t} \{t \in \alpha_i^h\}.$$

Wegen

$$P_{w(a,j_0)} = (a = q_0, q_1, \dots, q_n = j_0) \qquad \text{mit} \qquad q_0, q_1, \dots, q_\varkappa \in P_0^h, \qquad \varkappa < n$$

(wegen $a = q_0 \in P_0^h$), $q_{\varkappa+1} \in \overline{P_0^h}$ muß $A(q_{\varkappa+1}) \geqq \min_{i \in P} \min_t \{t \in \alpha_i^h\}$ gelten, andererseits hat man $A(q_{\varkappa+\nu}) = t_0$, $\nu = 1, \dots, n - \varkappa$, wegen der Minimalität von $l(w(a, j_0)) = t_0$. Mit (8) folgt wegen (6)

$$\varepsilon^h \leqq \min_{(q,j) \in K} \min_{t \in T_q} \{l_{qj}(t) + t\} - B^h(j), \qquad j \in \overline{P_0^h}, \tag{9}$$

und deshalb

$$B^h(j) \in \mathfrak{B}, \qquad j \in P \Rightarrow B^{h+1}(j) = B^h(j) + \varepsilon^h \cdot I_j(P_0^h) \in \mathfrak{B}, \qquad j \in P. \tag{10}$$

Wegen $\varepsilon^h \geqq 0$ (folgt mittels Induktion über h) erhält man eine Folge von $\mathfrak{B}$-zulässigen Lösungen B^h mit nicht fallenden Werten $B^h(b)$. Ist $B^h(b) > T$ wählbar für irgendein h, kann der Algorithmus abgebrochen werden. Wegen (7) folgt dann $W_T = \emptyset$. Kann andererseits $B^h_{\text{opt}}(b) \leqq T$ gefunden werden, ist über einen Rückverfolgungsalgorithmus mittels der Markierungen $m^h_{\text{opt}}(i, t)$ ein optimaler Weg $w_{\text{opt}}(a, b)$ mit $l(w_{\text{opt}}(a, b)) = B^h_{\text{opt}}(b)$ bestimmbar (mit den Markierungsmengen $m(i, t)$ kann die Menge aller zeitoptimalen Wege bestimmt werden) wegen der speziellen Wahl der Mengen T_q für $\mathfrak{B}$. Um zu zeigen, daß das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht, überlege man sich, daß $\varepsilon^h > 0$ und/oder $i(h) \notin P_0^h$ wegen der eingangs gemachten Voraussetzungen (Ganzzahligkeit, diskrete Zeit) nur endlich oft eintreten können (allgemeinere Annahmen sind möglich, falls man die daraus resultierenden Schwierigkeiten bzgl. dem Verhalten der Folge der ε^h und der Infimumsbildung über $l_{ij}(t)$ in Kauf nimmt). Der Fall

$$\varepsilon^h = 0, \qquad i(h) \in P_0^h, \tag{11}$$

kann wegen der Definition der α_i^h nur endlich oft eintreten. Zunächst überlege man, daß (11) nur für $|P_0^h| \geqq 2$ gelten kann. Es existieren dann aber Zahlen ν_h mit $1 \leqq \nu_h \leqq |P_0^h| - 1$ und $i(h - n_1) \neq i(h - n_2)$, $0 \leqq n_1 < n_2 \leqq \nu_h$, und $\mu_h \geqq 1$, daß, falls $\varepsilon^{h+\varkappa} = 0$ und $|P_0^{h+\varkappa}| = |P_0^h|$ für $\varkappa = 0, 1, \dots, \mu_h - 1$ gilt, wegen $i(h + m_1) \neq i(h + m_2)$, $-\nu_h \leqq m_1 < m_2 \leqq \mu_h - 1$

$$P_0^{h+\mu_h-1} - \bigcup_{\varrho=-\nu_h}^{\mu_h-1} \{i(h + \varrho)\} = \emptyset, \tag{12}$$

folgen muß. Für $h + \mu_h$ muß dann aber wegen (12) $\varepsilon^{h+\mu_h} > 0$ oder/und $i(h + \mu_h) \notin P_0^{h+\mu_h-1}$ gelten.

Im Spezialfall, wenn $V_p = \emptyset$, für alle $p \in P$, gilt, kann ein optimaler Weg (falls er existiert) in der Teilmenge der elementaren Wege aus W_T gefunden werden. Der Algorithmus benötigt dann maximal $|P| - 1$ Schritte. Die Mengen T_q sind dann von der einfachen Gestalt $[A_q, T]$, wobei $A_q = \min l(w(a, q))$ bedeutet. Es kann irgendein kürzester Weg-Algorithmus benutzt werden. Dreyfus [3] schlägt das bekannte Dijkstra-Verfahren [2] vor. Klafszky [6] benutzt ähnliche Überlegungen, mit entsprechenden Modifikationen löst sein Verfahren ebenfalls den Fall $V_p = \emptyset$, $p \in P$. Für dieses Problem haben als erste Cooke und Halsey [1] einen dynamischen Programmierungsansatz beschrieben. Erst in neuerer Zeit haben Halpern und Priess [5] die Aufenthaltsverbotsbedingungen einschließende Problemstellung behandelt. In Gaul [4] werden die hier beschriebenen Ergebnisse auf die Berechnung von Wegen maximaler Kapazität mit zeitabhängigen Nebenbedingungen übertragen.

Literatur

1 Cooke, K. L., Halsey, E., The shortest route through a network with time-dependent internodal transit times, J. Math. Analysis Appl. **14**, 493–498 (1966).
2 Dijkstra, E. W., A note on two problems in connexion with graphs, Numer. Math. **1**, 269–271 (1959).
3 Dreyfus, S. E., An appraisal of some shortest-path algorithms, J. ORSA **17**, 395–412 (1969).
4 Gaul, W., On the maximum capacity-route problem with time-dependent constraints, (submitted).
5 Halpern, J.; Priess, I., Shortest path with time constraints on movement and parking, Networks **4**, 241–253 (1974).
6 Klafszky, E., Determination of shortest path in a network with time-dependent edge-lengths, Math. Operationsforsch. Statist. **3**, 255–257 (1972).

Anschrift: Dr. Wolfgang Gaul, Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn, Wegelerstraße 6, D-53 Bonn, BRD