Graphenprobleme aus dynamischer Sicht

Wolfgang Gaul, Bonn

1. Einführung

Für Graphenmodelle, hier speziell für Problemformulierungen, die sich bei der Beschreibung und Lösung von Fragestellungen aus dem Operations Research Bereich bewährt haben, erhöht sich durch Berücksichtigung dynamischer Aspekte der Realitätsbezug. Die vorliegende Arbeit gibt deshalb einen Überblick über bekannte Lösungsansätze und diskutiert Verbindungen zwischen dynamischen Weg- und Flußproblemen zur Lösung noch nicht behandelter Fragestellungen.

Die vorliegende Problematik haben als erste Ford/Fulkerson [5, 1958] durch Berücksichtigung dynamischer Aspekte bei Flußproblemen (für einen Spezialfall) untersucht. Ihr Lösungsvorschlag wurde in [1], [8], [13], [16], [17], [19], [20] zur Angabe verallgemeinerter Flußprobleme mit verwandten Formulierungen für Wegprobleme unter Einbeziehung dynamischer Überlegungen in [2], [4], [9] - [12], [14], [15] enthalten.

2. Modellformulierung

Ein dynamischer Graph werde für den Beobachtungszeitraum $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+$ durch

$$G_{\mathcal{T}} = (P, K, g)$$

beschrieben, wobei (P, K) einen endlichen, gerichteten (schwach) zusammenhängenden Graphen mit der Punktmenge $P \neq \emptyset$ und der Kantenmenge $K \subset P \times P$ angibt (Parallele Kanten sind dadurch ausgeschlossen, Schlingen (Kanten der Form $(i, i), i \in P$) werden dann benötigt, wenn man Aufenthaltszeiten in den Punkten berücksichtigen will).

$g = (g^1, \dots, g^l)$ mit $g^s: K \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq s \leq l, l \geq 1$, beschreibt Bewertungsfunktionen für die Kanten in Abhängigkeit vom Benutzungsbeginn $\tau \in \mathcal{T}$. Insbesondere ist immer $g^1 := t: K \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ die Benutzungsdauer der Kanten.

Für Anwendungen erweisen sich folgende Einschränkungen als vorteilhaft¹⁾. Man wählt $\mathcal{T} \subset [0, T]$, meistens

- (2.1) (i) $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T\}$ mit der Beobachtungsgrenze T
 (ii) $g^s(i, j, \tau) \in \mathbb{Z}$, $s \in \{1, \dots, l\}$, $(i, j) \in K$, $\tau \in \mathcal{T}$

wobei man auf der Menge $\{\tau \in \mathcal{T} \mid \tau + t(i, j, \tau) > T\}$ für $g^s(i, j, \tau)$, $s \in \{2, \dots, l\}$ geeignete (oft rechen technisch bedingte) Veränderungen vornehmen darf (Bei Berücksichtigung von Aufenthaltsmöglichkeiten in Punkten wählt man insbesondere $t(i, i, \tau) = 1$ für alle $\tau \in \mathcal{T}$, $g^s(i, i, \tau)$, $s \in \{2, \dots, l\}$ entsprechend der Problemformulierung.).

Zu $G_{\mathcal{T}}$ läßt sich ein sogenannter zeiterweiterter Graph $\tilde{G}_{\mathcal{T}} = (\tilde{P}, \tilde{K}, \tilde{g})$ definieren durch

- (2.2) (i) $\tilde{P} = \{i_{\tau} \mid i \in P, \tau \in \mathcal{T}\}$
 (ii) $\tilde{K} = \{(i_{\tau}, j_{\tau'}) \mid i, j \in P, (i, j) \in K, \tau, \tau' \in \mathcal{T}, \tau' = \tau + t(i, j, \tau)\}$
 (iii) $\tilde{g} = (\tilde{g}^1, \dots, \tilde{g}^l)$ wobei $\tilde{g}^s: \tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}$ mit
 $\tilde{g}^s(i_{\tau}, j_{\tau'}) = g^s(i, j, \tau)$

Dynamische Problemstellungen bzgl. $G_{\mathcal{T}}$ lassen sich so mit (bekannten statischen) Formulierungen bzgl. $\tilde{G}_{\mathcal{T}}$ in Beziehung bringen. Das hat vor allem beweistechnische Vorteile. Für eine praktische Handhabung ist $\tilde{G}_{\mathcal{T}}$ wegen seines Umfanges in der Regel ungeeignet weshalb man nach effizienteren (nur auf $G_{\mathcal{T}}$ operierenden) Lösungsmethoden sucht.

Von Interesse ist dabei insbesondere der Spezialfall, wenn g auf $\mathcal{T}$ konstant ist, der Grundlage der von Ford/Fulkerson initiierten Betrachtungen über dynamische Flüsse war.

3. Flußprobleme in dynamischen Graphen

Sei $G_{\mathcal{T}} = (P, K, g)$ mit $g = (g^1, g^2) = (t, c)$ vorgegeben, $c: K \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ beschreibe hier die Kantenkapazität.

Sei $T(i, j, \tau) = \{\tau' \in \mathcal{T} \mid \tau' + t(i, j, \tau) = \tau\}$ für $(i, j) \in K$, $\tau \in \mathcal{T}$, ferner

1) Die vorausgesetzte Ganzzahligkeit der Bewertungsfunktionen ist für die Endlichkeit der angegebenen Lösungsverfahren von Wichtigkeit. Eine hinreichend klein gewählte Beobachtungsdifferenz $\Delta > 0$ ergäbe die Forderung $\mathcal{T} = \{0, \Delta, 2\Delta, \dots, T\Delta\}$ wobei $T\Delta$ eine hinreichend groß gewählte Beobachtungsgrenze beschreibt. Zur Vereinfachung ist o.B.d.A. $\Delta = 1$ gesetzt.

$A(i) = \{j \in P \mid (i, j) \in K\}$, $B(i) = \{j \in P \mid (j, i) \in K\}$ für $i \in P$.
Damit erhält man für $h : K \times \mathcal{T} \rightarrow R$ (und $i \in P, \tau \in \mathcal{T}$) den
Ausdruck $F(h, i, \tau) = \sum_{j \in A(i)} h(i, j, \tau) - \sum_{j \in B(i)} \sum_{\tau' \in \mathcal{T}(j, i, \tau)} h(j, i, \tau')$.

Dann wird auf $G_{\mathcal{T}}$ durch $f : K \times \mathcal{T} \rightarrow R$ mit den Nebenbedingungen

$$(3.1) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \sum_{\tau=0}^T F(f, q, \tau) - v(f, T) = 0 \\ (ii) \quad & F(f, i, \tau) = 0, \quad i \in P \setminus \{q, s\}, \tau \in \mathcal{T} \\ (iii) \quad & \sum_{\tau=0}^T F(f, s, \tau) + v(f, T) = 0 \\ (iv) \quad & 0 \leq f(i, j, \tau) \leq c(i, j, \tau), \quad (i, j) \in K, \tau \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

(auf $\{\tau \in \mathcal{T} \mid \tau + t(i, j, \tau) > T\}$ gelte $c(i, j, \tau) = 0$)
ein T -dynamischer Fluß von q nach s , $q, s \in P$, vom Wert
 $v(f, T) \in R_+$ definiert. Beschreibt $\mathcal{F}(T)$ die Menge dieser
 T -dynamischen Flüsse, so gilt $\mathcal{F}(T) \neq \emptyset$, da zumindest $f \equiv 0$
(mit $v(f, T) = 0$) die Bedingungen (3.1) erfüllt, und eine der
ersten Fragestellungen ist die nach Berechnungsmöglichkeiten
von Elementen aus der Menge der T -dynamischen Flüsse mit maxi-
malen Wert $\mathcal{F}_{\max}(T)$. Die Antwort ist für den Spezialfall, daß

$$(3.2) \quad \begin{aligned} g^1(i, j, \tau) &= t(i, j, \tau) = t_{ij} \quad \text{für } \tau \in \mathcal{T} \\ g^2(i, j, \tau) &= c(i, j, \tau) = c_{ij} \quad \text{auf } \{\tau \in \mathcal{T} \mid \tau + t_{ij} \leq T\}, \quad (i, j) \in K \end{aligned}$$

gilt, in [5] enthalten ((3.1) vereinfacht sich, denn
 $T(i, j, \tau) = \{\tau - t_{ij}\} \cap \mathcal{T}$ ist dann höchstens einelementig.) Bei der
in dieser Arbeit vorgeschlagenen Methode ist von Vorteil, daß sie
lediglich die T -malige Berechnung äußerst einfacher statischer
Flußprobleme erfordert, allerdings brauchen die mittels [5] erhal-
tenen Lösungen nicht gewisse (in [8] oder [16] geforderte)
wünschenswerte Zusatzeigenschaften zu erfüllen.

Um diese Eigenschaften zu erklären, betrachtet man die auf
 $\mathcal{T}' = \{0, 1, \dots, T'\}$, $T' \in \mathcal{T}$, eingeschränkte Problemstellung. Den
Übergang von $G_{\mathcal{T}}$ auf $G_{\mathcal{T}'} = (P, K, g')$ (mit $g' = g/\mathcal{T}'$) erhält man
dabei durch entsprechende in Abhängigkeit von $(i, j) \in K$ durch-
zuführende Abänderung der Bewertungen auf $\{\tau \in \mathcal{T}' \mid T' \leq \tau + t(i, j, \tau) \leq T\}$.
Umgekehrt kann man aus Formulierungen für $G_{\mathcal{T}'}$ auf solche für $G_{\mathcal{T}}$
schließen, z.B. folgt aus $f' \in \mathcal{F}(T')$ für $f : K \times \mathcal{T} \rightarrow R$ mit

$f(i, j, \tau) = f'(i, j, \tau)$ für $\tau \in \mathcal{T}'$; $= 0$, sonst, die Aussage $f \in \mathcal{F}(T)$.
Sei

$$(3.3) \quad (i) \quad w_1(q, T') = \max_{f \in \mathcal{F}(T)} \sum_{\tau=0}^{T'} F(f, q, \tau)$$

$$(ii) \quad w_2(q, T') = \min_{f \in \mathcal{F}_{\max}(T)} \sum_{\tau=0}^{T'} F(f, q, \tau)$$

$$(iii) \quad w_3(s, T') = \max_{f \in \mathcal{F}(T)} \sum_{\tau=0}^{T'} (-F(f, s, \tau))$$

$$(iv) \quad w_4(s, T') = \min_{f \in \mathcal{F}_{\max}(T)} \sum_{\tau=0}^{T'} (-F(f, s, \tau))$$

Man interessiert sich dann für Flüsse $f_\xi \in \mathcal{F}(T)$, $\xi = 1, \dots, 4$, die die Bedingungen

$$(3.4) \quad (i) \quad \forall_{0 \leq T' \leq T} \sum_{\tau=0}^{T'} F(f_1, q, \tau) = w_1(q, T')$$

$$(ii) \quad \forall_{0 \leq T' \leq T} \sum_{\tau=0}^{T'} F(f_2, q, \tau) = w_2(q, T')$$

$$(3.5) \quad (i) \quad \forall_{0 \leq T' \leq T} \sum_{\tau=0}^{T'} (-F(f_3, s, \tau)) = w_3(s, T')$$

$$(ii) \quad \forall_{0 \leq T' \leq T} \sum_{\tau=0}^{T'} (-F(f_4, s, \tau)) = w_4(s, T')$$

erfüllen. Man sieht sofort, (3.4), (3.5) erfüllende Flüsse sind T-dynamische Flüsse mit maximalem Wert und folgenden einfach zu interpretierenden Zusatzbedingungen. Man sagt: f_1 besitzt frühestmögliche, f_2 spätestmögliche Startzeiten bzgl. $q \in P$, f_3 besitzt frühestmögliche, f_4 spätestmögliche Ankunftszeiten bzgl. $s \in P$. Insbesondere sind natürlich Flüsse, die gleichzeitig einer der Bedingungen von (3.4) für $q \in P$ und einer von (3.5) für $s \in P$ genügen, von Interesse. Dabei kann das Erfülltsein von (3.4)(i) bzw. (3.5)(ii) z.B. dann wünschenswert sein, wenn in $q \in P$ bzw. $s \in P$ nur begrenzte Lagerungsmöglichkeiten vorhanden sind. T-dynamische Flüsse, die (3.5)(i) genügen, werden in der Literatur auch als "universal maximal dynamic flows" bezeichnet, weil sie, wie man sich leicht überlegt,

die Bedingung

$$(3.6) \quad \forall_{0 \leq T' \leq T} f_{3/\tau'} \in \mathcal{F}_{\max}(T')$$

(allgemeiner gilt $w_3(q, T') = \max_{f \in \mathcal{F}(T')} v(f, T') \leq w_1(q, T')$ für $T' \in \mathcal{T}$,

wobei für $T' < T$ echte Ungleichheit auftreten kann) erfüllen, ihre Einschränkung bzgl. τ' auf die Graphen $G_{\tau'}$, also dort gerade T' -dynamische Flüsse mit maximalem Wert liefert. Über solche Flüsse wurde zuerst in [8] berichtet, ihre algorithmische Bestimmung ist für den durch (3.2) beschriebenen Spezialfall als Modifikation des aus [5] bekannten Verfahrens in [19] enthalten. Die übrigen Nebenbedingungstypen aus (3.4), (3.5) und eine Berechnungsmöglichkeit für T -dynamische Flüsse, die diesen Bedingungen genügen, ist, wiederum nur für den Spezialfall (3.2) und in Abänderung des aus [5] bekannten Verfahrens, in [16] enthalten.

Auf die algorithmischen Aspekte [5], insbesondere die Darstellung des "out-of-kilter" Ansatzes zur Bestimmung einer verallgemeinerten statischen Flußproblemformulierung (aus deren Lösung, dargestellt mittels Flußpfadzerlegung, man über geeignete zeitliche Wiederholungen der Flußpfade die dynamische Lösung erhält) und ihre in [16] und [19] (siehe auch [17] und [20]) behandelten Varianten, wird im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen.

4. Existenzaussagen für dynamische Flüsse

Zuerst stellt sich natürlich die Frage nach der Existenz der im vorigen Abschnitt angegebenen speziellen T -dynamischen Flüsse.

Sie läßt sich durch Übergang von G_{τ} auf $\tilde{G}_{\tau}$ beantworten.

Mit $q, s \in P$ und dadurch definierte Punktmenge $Q_T = \{q_{\tau} \mid \tau \in \mathcal{T}\}$, $S_T = \{s_{\tau} \mid \tau \in \mathcal{T}\}$ auf $\tilde{G}_{\tau}$ erhält man nämlich

(4.1) Lemma:

Es existiert ein T -dynamischer Fluß f von q nach s in G_{τ} vom Wert $v(f, T) = v$ genau dann, wenn in $\tilde{G}_{\tau}$ ein (statischer) Fluß $\tilde{f}$ von Q_T nach S_T mit Wert $v(\tilde{f}) = v$ existiert.

Zum Beweis definiere man für das Wertepaar $f(i, j, \tau), \tilde{f}(i_{\tau}, j_{\tau'})$ mit $i, j \in P, (i, j) \in K, \tau, \tau' = \tau + t(i, j, \tau) \in \mathcal{T}$ den Kantenwert des

nachzuweisenden Flusses durch den des existierend vorausgesetzten und überprüfe die Flußbedingungen.

Für statische Flußprobleme auf einem Graphen $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, c, v^+, v^-, b^+, b^-)$ mit der Partition $\mathcal{P} = Q \cup Z \cup S$, wo $c: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$ die Kantenkapazität $v^+, v^-: Q \rightarrow \mathbb{R}_+$ Höchst-, Mindest-Schranken bzgl. Q , $b^+, b^-: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ Höchst-, Mindest-Schranken bzgl. S beschreibt, hat man aber (unter Benutzung der Abkürzungen $h_1(X) = \sum_{x \in X} h_1(x)$ für $X \subset \mathcal{P}$, $h_1: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_2(X, Y) = \sum_{x \in X, y \in Y} h_2(x, y)$ für $X, Y \subset \mathcal{P}$, $h_2: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$)

(4.2) **Satz:**

Folgende Aussagen sind äquivalent: Für $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, c, v^+, v^-, b^+, b^-)$ gilt

- (i) Es existiert ein Fluß f von Q nach S mit
- $$\left. \begin{array}{l} v^-(p) \\ -b^+(p) \end{array} \right\} \leq f(p, \mathcal{P}) - f(\mathcal{P}, p) \leq \left\{ \begin{array}{l} v^+(p) \\ -b^-(p) \end{array} \right. , p \in Q$$
- (ii) Es gilt für $X \subset \mathcal{P}$ (mit $\bar{X} = \mathcal{P} \setminus X$)
- $$c(X, \bar{X}) \geq b^-(\bar{X} \cap S) - v^+(\bar{X} \cap Q)$$
- $$c(X, \bar{X}) \geq v^-(X \cap Q) - b^+(X \cap S)$$
- (iii) Es existiert für $\hat{S} \subset S$ ein Fluß $f_{\hat{S}}$ von Q nach S mit
- $$-b^+(\hat{S}) \leq f_{\hat{S}}(\hat{S}, \mathcal{P}) - f_{\hat{S}}(\mathcal{P}, \hat{S}) \leq -b^-(\hat{S})$$
- $$v^-(p) \leq f_{\hat{S}}(p, \mathcal{P}) - f_{\hat{S}}(\mathcal{P}, p) \leq v^+(p) , p \in Q$$
- (iv) Es existiert für $\hat{Q} \subset Q$ ein Fluß $f_{\hat{Q}}$ von Q nach S mit
- $$v^-(\hat{Q}) \leq f_{\hat{Q}}(\hat{Q}, \mathcal{P}) - f_{\hat{Q}}(\mathcal{P}, \hat{Q}) \leq v^+(\hat{Q})$$
- $$-b^+(p) \leq f_{\hat{Q}}(p, \mathcal{P}) - f_{\hat{Q}}(\mathcal{P}, p) \leq -b^-(p) , p \in S$$

Zum Beweis überlege man sich, daß die Äquivalenz (i) $\leftrightarrow$ (ii) gerade einen Spezialfall des allgemeinen Zirkulationsatzes (siehe z.B. [18]) beschreibt. Der Übergang (i) $\rightarrow$ (iii) (bzw. (i) $\rightarrow$ (iv)) ist trivial, für die Richtung (iii) $\rightarrow$ (ii) (bzw. (iv) $\rightarrow$ (ii)) braucht man die Kenntnis des Max.Fluß-Min.Schnitt Theorems.

Die Existenz von T-dynamischen Flüssen, die (3.4), (3.5) erfüllen ergibt sich dann als Folgerung aus (4.2). Man hat nur die

Schranken v^+, v^-, b^+, b^- geeignet zu wählen und entsprechend dem Nebenbedingungstyp (3.4) oder (3.5) für $\hat{Q} \subset Q_T$ oder $\hat{S} \subset S_T$ die Existenz eines Flusses $f_{\hat{Q}}$ oder $f_{\hat{S}}$ entsprechend (4.2) (iv) oder (iii) zu verifizieren. Ist $\hat{Q} \neq Q_T$, oder $\hat{S} \neq S_T$, für alle $T \in \mathcal{T}$, kann man den Nachweis mittels Flußpfadzerlegungen der nach Voraussetzung (wegen (4.1)) existierenden f_{Q_T} , oder f_{S_T} , erbringen. Man erhält also

(4.3) Korollar:

- (i) Es gibt $f_{\xi} \in \mathcal{F}_{\max}^{\xi}(T)$, so daß (3.4) (ξ) erfüllt ist $\xi=1,2$.
- (ii) Es gibt $f_{\xi+2} \in \mathcal{F}_{\max}^{\xi+2}(T)$, so daß (3.5) (ξ) erfüllt ist, $\xi=1,2$.

Ein Existenznachweis für f_3 ist zuerst in [8] enthalten. Für die übrigen Flüsse findet man entsprechende Aussagen in [16] (Der Nachweis wird dort über Markierungsüberlegungen und das Max. Fluß-Min.Schnitt Theorem konstruktiv geführt.).

5. Wegprobleme mit zeitabhängigen Nebenbedingungen

Sei $G_{\mathcal{T}} = (P, K, g)$ vorgegeben, zunächst gelte $g = (g^1) = t$. Einen Weg von q nach s , $q, s \in P$, der zur Zeit $\tau \in \mathcal{T}$ in $q \in P$ beginnt, kann beschrieben werden durch

$$r(q, s, \tau) = (P_{r(q, s, \tau)}, A_{r(q, s, \tau)}, D_{r(q, s, \tau)}).$$

Mit der $r(q, s, \tau)$ zugeordneten Indexmenge $I_{r(q, s, \tau)} = \{0, 1, \dots, m\}$ kennzeichnet dabei

$$(5.1) \quad P_{r(q, s, \tau)} = (q = p_0, p_1, \dots, p_m = s), \quad p_i \in P \quad \text{für } i \in I_{r(q, s, \tau)},$$

die Folge der über den Weg (in dieser Anordnung) durchlaufenen Punkte,

$$(5.2) \quad (i) \quad A_{r(q, s, \tau)} = (a^{\tau}(p_0), \dots, a^{\tau}(p_m))$$

$$(ii) \quad D_{r(q, s, \tau)} = (d^{\tau}(p_0), \dots, d^{\tau}(p_{m-1})), \quad d^{\tau}(p_i) \in \mathcal{T} \quad \text{für}$$

$$i \in I_{r(q, s, \tau)} \setminus \{m\},$$

die dabei realisierten Ankunfts-bzw. Startzeiten für die Punktfolge $P_{r(q, s, \tau)}$.

Natürlich muß gelten

- (5.3) (i) $d^{\tau}(p_i) \geq a^{\tau}(p_i)$, $i \in I_{r(q,s,\tau)} \setminus \{m\}$
 (ii) $a^{\tau}(p_0) = \tau$
 (iii) $a^{\tau}(p_m) \leq T$
 (iv) $a^{\tau}(p_i) = d^{\tau}(p_{i-1}) + t(p_{i-1}, p_i, d^{\tau}(p_{i-1}))$

Ist die Differenz $d^{\tau}(p_i) - a^{\tau}(p_i)$ positiv, beschreibt sie eine Wartezeit in p_i . Wenn für gewisse Punkte $p \in P$ Zeitintervalle existieren, in denen Warteverbote bestehen, z.B. in der Gestalt

$$V_p = \bigcup_{k=1}^{n(p)} [t_{1k}^p, t_{2k}^p], \quad t_{1k}^p \leq t_{2k}^p \quad (< t_{1(k+1)}^p \text{ falls } n(p) > 1)$$

so hat man, falls für einen Weg $r(q,s,\tau)$ ein solcher Punkt p zur Punktfolge $P_{r(q,s,\tau)}$ gehört, zusätzlich zu beachten

- (5.4) (i) $d^{\tau}(p) = a^{\tau}(p)$ falls $a^{\tau}(p) \in V_p$
 (ii) $d^{\tau}(p) \leq t_{1(k+1)}^p$ falls $t_{2k}^p < a^{\tau}(p) < t_{1(k+1)}^p$

Von Interesse sind nun bekanntlich Wege, deren Weglänge

$$t(r(q,s,\tau)) = \sum_{i \in I_{r(q,s,\tau)} \setminus \{m\}} t(p_i, p_{i+1}, d^{\tau}(p_i)) + d^{\tau}(p_i) - a^{\tau}(p_i)$$

minimal wird bzw. zumindest der Schranke $T - \tau$ genügt (Entsprechendes gilt, falls g mehr als eine Bewertungsfunktion beschreibt, für die übrigen Bewertungsfunktionale.)

Zur Überprüfung der Existenz solcher Wege hat es sich wegen der durch die Tupeldarstellung bedingten aufwendigen Beschreibungsweise als sinnvoll erwiesen, das folgende Problem zu betrachten

- (5.5) $\max_{\mathcal{L}^{\tau}} \beta^{\tau}(s)$
 mit $\mathcal{L}^{\tau} = \{ \beta^{\tau}(i), i \in P \mid \beta^{\tau}(q) = \tau, \beta^{\tau}(j) \leq \min_{(i,j) \in K} \min_{\nu \in T_i^{\tau}} \{ t(i,j,\nu) + \nu, i \in P \setminus \{q\} \} \}$

wobei $T_i^{\tau} = \{ \nu \in \mathcal{T} \mid \exists r(q,s,\tau) \text{ mit } \tau + t(r(q,s,\tau)) = \nu \leq \nu \text{ mit } [g,\nu] \cap V_i = \emptyset \}$

die Menge der Zeitpunkte angibt, in denen eine Ankunft (bzw. ein Aufenthalt) im Punkte i nach einem Start vom Punkt q zum Zeitpunkt τ möglich ist. Bezeichnet $R_T(q,s,\tau)$ die Menge der durch $T - \tau$ beschränkten Wege, so gilt

(5.6) Lemma:

- (i) $\mathcal{L}^\tau \neq \emptyset$
(ii) $\min_{R_T(q,s,\tau)} a^\tau(s) \geq \max_{\mathcal{L}^\tau} \beta^\tau(s)$
(iii) $\beta_{\max}^\tau(s) > T \implies R_T(q,s,\tau) = \emptyset$
(iv) $\beta_{\max}^\tau(s) \leq T \implies \exists r_o(q,s,\tau) \in R_T(q,s,\tau)$ mit $a_o^\tau(s) = \beta_{\max}^\tau(s)$

Zum Beweis von (i) überlege man, daß immer $\beta^\tau \equiv \tau \in \mathcal{L}^\tau$ gilt.
(ii) folgt über aus (5.5) und (5.3) bildbare Ungleichungen.
(iii) ergibt sich sofort aus (ii). Ist $\beta_{\max}^\tau(s) \leq T$, so folgt durch Einsetzen von $\beta_{\max}^\tau(s)$ in die $\mathcal{L}^\tau$ definierende Ungleichung die Existenz von $i_o \in B(s)$ und $v_o', v_o'' \in T_{i_o}^\tau$ mit $\tau + t(r(q, i_o, \tau)) = v_o' \leq v_o''$ und $r_o(q, s, \tau)$ läßt sich in der Gestalt $r_o(q, s, \tau) = r(q, i_o, \tau) \cup ((i_o, s), (v_o', \beta_{\max}^\tau(s)), (v_o'', \tau))$ darstellen.

Kennt man also ein Verfahren zur Lösung von (5.5), so wird dadurch nicht nur die Frage nach der Existenz von Wegen mit durch $T - \tau$ beschränkten Weglängen beantwortet, sondern darüber hinaus, falls $R_T(q, s, \tau) \neq \emptyset$ gilt, wegen (5.6) (iv) auch ein optimaler Weg gefunden. Auf eine algorithmische Abhandlung dieser Fragen soll hier nicht eingegangen werden, dazu siehe man z.B. [9], [10], wo auch die Einbeziehung weiterer Bewertungskriterien, vor allem Kapazitäts- und Kostengesichtspunkte, berücksichtigt wird. Es ergeben sich natürlich Beziehungen zu dynamischen Flußproblemformulierungen, z.B. gilt für f_3 aus (3.5) (i), daß die Flußpfadzerlegung für $f_{3/T'}$ mit $T' = \beta_{\max}^\tau(s)$ gerade aus den hier beschriebenen zeitoptimalen Wegen besteht. Weiter kann man in der Menge dieser zeitoptimalen Wege nach einem kostenoptimalen suchen, dessen Wegkapazität dann gerade einen Flußanteil beschreibt, der zeit- und kostenoptimal entlang dieses Weges von q nach s gelangen kann. Es ist aber nicht möglich, mit den bisher in der Literatur bekannten zeitabhängigen Wegalgorithmen allgemeinere Problemstellungen für dynamische Flüsse zu lösen, da in alle diese Ansätze die Nichtnegativität der Kantenbenutzungsdauern ($t(i, j, \tau) \geq 0$) eingeht, wo hingegen (in Analogie zum statischen Fall und im Gegensatz zur Irreversibilitätsbedingung der Zeit) auch negative $t(i, j, \tau)$ -Werte berücksichtigt werden müßten.

Hat man keine Nebenbedingungen der in (5.4) beschriebenen Art, vereinfachen sich die Überlegungen erheblich. [4] und [14] beschäftigen sich mit diesem Fall. Die in (5.5) benutzte Menge T_i^z ist dann ein Intervall der Gestalt $[a_{\min}^z(i), T]$ und man kann eine zyklensfreie Lösung über einen Dijkstra-Ansatz in höchstens $|P|-1$ Schritten erhalten. Allgemein kann der zur Lösung von (5.5) gehörende Weg Zyklen enthalten. Einen ersten Ansatz zu dieser Fragestellung findet man in [12].

Literatur:

- [1] Bellmore, M./R.R. Vemuganti: On multi-commodity maximal dynamic flows. J.ORSA 21(1973) 10-21.
- [2] Cooke, K.L./E.Halsey: The shortest route through a network with time-dependent internodal transit times. J.Math.Anal.and Appl. 14(1966) 493-498.
- [3] Dijkstra, E.W.: A note on two problems in connexion with graphs. Num.Math. 1(1959) 269-271.
- [4] Dreyfus, S.E.: An appraisal of some shortest-path algorithms. J.ORSA 17(1969) 395-412.
- [5] Ford, L.R./D.R.Fulkerson: Constructing maximal dynamic flows from static flows. J.ORSA (1958) 419-433.
- [6] Ford, L.R./D.R.Fulkerson: Flows in networks. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1962).
- [7] Gale, D.: A theorem on flows in networks. Pacific J.Math. 7 (1957) 1073-1082.
- [8] Gale, D.: Transient flows in networks. Michigan Math.J. 6 (1959) 59-63.
- [9] Gaul, W.: On constrained shortest route problems. Lect. Notes in Economics and Math. Systems 117 (1975) 83-91.
- [10] Gaul, W.: Optimierungsprobleme auf dynamischen Graphen. Working paper.
- [11] Halpern, J.: Shortest route with time-dependent length of edges and limited delay possibilities in nodes. ZOR 21(1977) 117-124.
- [12] Halpern, J./I.Priess: Shortest path with time constraints on movement and parking. Networks 4(1974) 241-253.
- [13] Hoffman, A.J.: Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis. Proc. Symposia in Appl. Math. Vol X (1960) 113-127.
- [14] Klafszky, E.: Determination of shortest path in a network with time-dependent edge-lengths. Math. Operationsf. u. Stat. 3(1972) 255-257.
- [15] Lawler, E.L.: Combinatorial Optimization: Networks and matroids. Holt, Rinehart and Winston (1976).
- [16] Minieka, E.: Maximal, lexicographic, and dynamic flows. J.ORSA 21 (1973) 517-527.

- [17] Minieka, E.: Dynamic network flows with arc changes. Networks 4 (1974) 225-265.
- [18] Vogel, W.: Lineares Optimieren. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig (1970).
- [19] Wilkinson, W.L.: An algorithm for universal maximal dynamic flows in a network. J. ORSA 19 (1971) 1602-1612.
- [20] Wilkinson, W.L.: Min/Max bounds for dynamic network flows. NRLQ 20 (1973) 505-516.

Anschrift:
Inst. Angew. Mathematik
Universität Bonn
Wegelerstr. 6
D-5300 Bonn