Sonderdruck aus Sonderheft

GAMM-Tagung Lyngby 1977

Band 58

1978

W. GAUL

Stochastische Aspekte der Projektplanung

Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ die Menge der *Einzelaktivitäten eines gegebenen Projektes*, $O \subset A \times A$ die die logischen Abhängigkeiten zwischen den Einzelaktivitäten (z. B. Reihenfolgetabelle) bestimmende *binäre Ordnungsrelation* (irreflexiv, asymmetrisch, unter Beibehaltung dieser Eigenschaften transitiv erweiterbar), $X_a: (\Omega, \mathfrak{S}, P) \rightarrow (R_+, \mathfrak{B}_+)$ die der Aktivität $a \in A$ zugeordnete *stochastische Bewertung*, dann nennen wir $\mathfrak{B} = ((A, O), (X_a)_{a \in A})$ einen *stochastischen*

*Projektplan mit deterministischer Struktur*¹⁾. Bekanntlich muß sich nicht jede binäre Ordnungsrelation O auf A bzgl. Kantenadjazenz (KA) graphisch repräsentieren lassen. Wie eine entsprechende graphisch (KA)-repräsentierbare Erweiterung $A' = A \cup \Sigma$ (Σ Menge von Scheinvorgängen) und O' [binäre Ordnungsrelation auf A' , für die zumindest $O'/A \times A \subseteq O$ (Vermeidung nicht projektbedingter Abhängigkeiten) gilt] in geeigneter Weise anzugeben ist, ist aber bekannt (siehe z. B. [1], [6])²⁾.

Sei deshalb $\mathfrak{P}$ jetzt als graphisch (KA)-repräsentierbar vorausgesetzt und $G(P, K, \varphi)$ der bzgl. Kantenadjazenz zugeordnete endliche, zusammenhängende, schlichte, kreisfreie, gerichtete Graph. Nach Durchführung einer topologischen Sortierung der Punktmenge P von G heißt $\tilde{N}_{0m} = (P, K, \varphi, (X_k)_{k \in K})$ *stochastischer Netzplan mit deterministischer Struktur*.

$P := \{0, 1, \dots, m\}$ ist topologisch sortierte Punktmenge mit *Quelle* 0 und *Senke* m , $K := A$ die Kantenmenge, $\varphi : K \rightarrow P \times P$ mit $\varphi(k) = (\varphi_1(k), \varphi_2(k))$, $k \in K$, die Inzidenzabbildung.

Für $i \in P$ definiert man $B_i := \{j \in P \mid (j, \varphi_2(k) = i), k \in K\}$, $\hat{K}_i := \{k \in K \mid \varphi_2(k) = i\}$ und damit den Subgraphen $G_i(P_i, K_i, \varphi_i)$ von $\tilde{N}_{0m}$ bzgl. i mit

$$P_i := \{0, 1, \dots, i\}, \quad K_i := \bigcup_{\varphi_2} \hat{K}_i, \quad \varphi_i = \varphi|_{K_i}.$$

Von Interesse sind insbesondere *maximale Subnetzpläne* in G_i , bezeichnet mit $\tilde{N}_{0i}$, wobei wir allgemeiner für $r, s \in P$, $r \leq s$, Subnetzpläne der Gestalt $N_{rs} = (P_{rs}, K_{rs}, \varphi_{rs}, (X_k)_{k \in K_{rs}})$ betrachten. Dabei ist N_{rs} stochastischer Netzplan mit Quelle r und Senke s , $P_{rs} \subset \{r, r+1, \dots, s-1, s\}$ ($r, s \in P_{rs}$) topologisch sortierte Punktmenge, $K_{rs} \subset \varphi^{-1}(P_{rs} \times P_{rs} \cap \varphi(K))$, $\varphi_{rs} = \varphi|_{K_{rs}}$.

Sei W_{ij} die Bezeichnung für einen Weg von i nach j im betrachteten Netzplan, $K(W_{ij})$ die Kantenmenge von W_{ij} . Für N_{rs} erhält man mit $\mathfrak{W}_{rs} := \{W_{rs}^\mu \mid W_{rs}^\mu \text{ Weg in } N_{rs}, \mu = 1, \dots, t_{rs}\}$ die interessierende *kritische Weglänge* für N_{rs} über $L(N_{rs}) := \max_{\mathfrak{W}_{rs}} \sum_{k \in K(W_{rs}^\mu)} \text{proj}_{k \nu}$, besonderes Interesse besteht an

$$L_i := L(\tilde{N}_{0i}) = \max_{\mathfrak{W}_{0i}} \sum_{k \in K(W_{0i}^\mu)} \text{proj}_{k \nu} (L_0 := 0, L_m := L(\tilde{N}_{0m})).$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{N}_i$ eine Menge von Subnetzplänen der speziellen Gestalt N_{ji} , $j < i$ mit den folgenden Eigenschaften ($P(\mathfrak{N}_i) = \{j \mid N_{ji} \in \mathfrak{N}_i\}$);

$$\text{a) } N_{j_1 i} \cap N_{j_2 i} = \begin{cases} \{j, i\}, & j_1 = j_2 = j, \\ \{i\}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\text{b) } \forall W_{0i} \exists N_{ji} : W_{0i} = W_{0j} \cup W_{ji} \text{ mit } W_{ji} \subset N_{ji} \text{ und } W_{0j} \cap \mathfrak{N}_i \subset P(\mathfrak{N}_i)$$

(die Existenz solcher $\mathfrak{N}_i$ ist gesichert, man wähle speziell $\mathfrak{N}_i = \{\tilde{N}_{0i}\}$) so kann man zeigen

$$L_i = \max_{\mathfrak{N}_i} \{L_j + L(N_{ji})\}. \quad (1)$$

(Der Beweis kann punktweise über $\leq$ -Abschätzungen erfolgen. Dabei ist eine Richtung trivial erfüllt, die andere ergibt sich über a)–b).)

Bezeichnet man für Partitionen der Kantenmenge $K = Z \cup \bar{Z}$, $Z \cap \bar{Z} = \emptyset$ mit $E_Z, E_{\bar{Z}}$ die Erwartungswertbildung bzgl. des Zufallsvektors mit Komponenten aus Z bzw. $\bar{Z}$ (bei fehlender Indizierung erfolgt die Erwartungswertbildung bzgl. aller zu berücksichtigenden Variablen des zu integrierenden Ausdrucks), dann erhält man untere Schranken als Schätzer für die in der Regel schwierig zu bestimmenden Ausdrücke $E(L_i)$ (siehe [8]). (Die angegebenen Erwartungswerte sollen existieren, zur Vereinfachung sei die Kenntnis entsprechender gemeinsamer Verteilungen der Zufallsvariablen geeigneter Teilkantenmengen und zumindest Unabhängigkeit zwischen diesen Zufallsvektoren vorausgesetzt.)

$$E(L_i) \geq E_Z \max_{\mathfrak{N}_i} \{E_{\bar{Z}}(L_j + L(N_{ji}))\}. \quad (2)$$

Dabei genügt es, Partitionen von $\tilde{K}_{0i}$ zu betrachten.

Wählt man insbesondere $\tilde{K}_{0i} = Z^* \cup \bar{Z}^*$, $Z^* \cap \bar{Z}^* = \emptyset$ mit $Z^* = \bigcup_{\mathfrak{N}_i} K_{ji}$, so ergibt sich

$$E(L_i) \geq E_{Z^*} \max_{\mathfrak{N}_i} \{E_{\bar{Z}^*}(L_j) + L(N_{ji})\}, \quad (3)$$

weil $L(N_{ji})$ über Projektionen auf die Teilmenge K_{ji} gebildet wird.

Nimmt man entsprechende Genauigkeitseinbußen in Kauf, erhält man über diesen Ansatz einfacher berechenbare (z. B. mittels PERT), allerdings zu optimistische Schätzungen für $E(L_i)$.

Als Spezialfälle seien erwähnt:

1. $\mathfrak{N}_i = \{\tilde{N}_{0i}\}$, $Z_1 = \tilde{K}_{0i} \Rightarrow \bar{Z}_1 = \emptyset$ ergibt wegen $E(L_i) = E_{\tilde{K}_{0i}}(L_0 + L(\tilde{N}_{0i}))$ die Identität (mit $L_0 := 0$, $L_i := L(\tilde{N}_{0i})$).

¹⁾ Die Berücksichtigung von die Projektplanung beeinflussenden stochastischen Einwirkungen soll in dieser Arbeit nicht auf die dem Plan zugrundeliegende Ordnungsstruktur übertragen werden.

²⁾ Der Übergang auf graphisch (KA) repräsentierbare Strukturen geschieht aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit mit den Artikeln [3], [4], [7]. Eine Formulierung im allgemeineren Ordnungskonzept ist möglich.

2. $\mathfrak{N}_i^2 = \{N_{ji} = (j, i) \in K\}$, $Z_2 = \emptyset \Rightarrow \bar{Z}_2 = \bar{K}_{0i}$ ergibt $E(L_i) \geq \max_{\mathfrak{N}_i} \{E(L_j) + E(X_{\varphi^{-1}(j,i)})\}$; diese Ungleichung bildet die Grundlage für die PERT-Schätzung

$$(\hat{E}^{\text{PERT}}(L_0) = 0, \quad \hat{E}^{\text{PERT}}(L_i) = \max_{\mathfrak{N}_i^2} \{\hat{E}^{\text{PERT}}(L_j) + \hat{E}^{\text{PERT}}(X_{\varphi^{-1}(j,i)})\}, \quad i \in P - \{0\}.$$

3. $\mathfrak{N}_i^3 = \{N_{ji} = (j, i) \in K\}$, $Z_3 = \hat{K}_i (= \bigcup_{\mathfrak{N}_i^3} K_{ji})$ ergibt

$$E(L_i) \geq E_{\hat{K}_i} \max_{\mathfrak{N}_i^3} \{E_{\hat{K}_i}(L_j) + X_{\varphi^{-1}(j,i)}\},$$

diese Ungleichung bildet die Grundlage für die FULKERSON-Schätzung

$$(F(L_0) = 0, \quad F(L_i) = E_{\hat{K}_i} \max_{\mathfrak{N}_i^3} \{F(L_j) + X_{\varphi^{-1}(j,i)}\}, \quad i \in P \setminus \{0\}.$$

Während, wie man sich leicht überzeugt, in den Fällen 1.—3. die Bedingungen a)–b) automatisch erfüllt waren, setzen wir jetzt

4. $\mathfrak{N}_i^4 = \{N_{ji} = W_{ji} \mid W_{ji} \text{ Weg von } j \text{ nach } i, \text{ wobei a)–b) erfüllt ist}\}$,

$$Z_4 = \bigcup_{\mathfrak{N}_i^4} K(W_{ji}) \text{ ergibt } E(L_i) \geq E_{Z_4} \max_{\mathfrak{N}_i^4} \{E_{Z_4}(L_j) + L(W_{ji})\},$$

diese Ungleichung bildet die Grundlage für die ROBILLARD-TRAHAN Schätzung

$$(RT(L_0) = 0, \quad RT(L_i) = E_{Z_4} \max_{\mathfrak{N}_i^4} \{RT(L_j) + L(W_{ji})\}, \quad i \in P \setminus \{0\}.$$

Man kann zeigen

$$E(L_i) \geq RT(L_i) \geq F(L_i) \geq \hat{E}^{\text{PERT}}(L_i). \tag{4}$$

Bei einer Verbesserung der wegen ihrer einfachen Berechnungsmöglichkeit wohl am häufigsten benutzten Schätzer nach der PERT-Methode hat man sich also Kenntnis über Verteilungen und entsprechende Erwartungswerte von kritischen Weglängen für Subnetzpläne zu verschaffen.

Inwieweit sich Monotoniebeziehungen der in (4) beschriebenen Art auch auf andere Schätzmöglichkeiten (bezüglich geeignet zu wählender Systeme $\mathfrak{N}_i$ und der Inklusionsbeziehung bzgl. Teilmengen von $\bar{K}_{0i}$) übertragen lassen, wird noch untersucht.

Literatur

- 1 BRUNS, M.; KAERKES, R., Zur Einbettung strikter Halbordnungen in Netzrelationen, Operations Res.-Verf. 7 (1969).
- 2 CLINGEN, C. T., A modification of FULKERSON's PERT algorithm, J. ORSA 12 (1964).
- 3 ELMAGHRABY, S. E., On the expected duration of PERT type networks, J. ORSA 13 (1967).
- 4 FULKERSON, D. R., Expected critical path length in PERT type networks, J. ORSA 10 (1962).
- 5 KAERKES, R., Ergebnisse der Theorie der Netzpläne mit stochastisch verteilten Vorgangsdauern, Proc. Operat. Res. 5 (1975).
- 6 MÖHRING, R., Graphentheoretische Repräsentation endlicher Ordnungen, Proc. Operat. Res. 3 (1973).
- 7 ROBILLARD, P.; TRAHAN, M., Expected completion time in PERT networks, J. ORSA 24 (1976).
- 8 SEELING, R.; SPELDE, H. G., Verfahren zur direkten Berechnung stochastischer Netzpläne, Proc. Operat. Res. 5 (1975).